



KTH Engineering Sciences

KTH:s Matematiska Cirkel

# GRUPPER, MÖNSTER OCH SYMMETRIER

KATHARINA HEINRICH  
GUSTAV SÆDÉN STÅHL



INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK, 2013–2014  
FINANSIERAT AV MARIANNE OCH MARCUS WALLENBERGS STIFTELSE



# Innehåll

<b>1</b>	<b>Grundläggande begrepp och bevisföring</b>	<b>1</b>
1.1	Mängder . . . . .	1
1.2	Funktioner . . . . .	3
1.3	Matematisk bevisföring . . . . .	6
1.4	Ett bevis . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Planet och dess avbildningar</b>	<b>13</b>
2.1	Talplanet . . . . .	13
2.2	Delmängder av planet . . . . .	17
2.3	Avbildningar i planet . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Isometrier och symmetrier</b>	<b>23</b>
3.1	Isometrier . . . . .	23
3.2	Symmetrier . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Grupper</b>	<b>35</b>
4.1	Definition och några exempel . . . . .	35
4.2	Symmetrigrupper . . . . .	37
4.3	Några egenskaper hos grupper . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Delgrupper och generatorer</b>	<b>43</b>
5.1	Delgrupper . . . . .	43
5.2	Generatorer . . . . .	45
5.3	Sju exempel . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Frisgrupper</b>	<b>54</b>
6.1	Definition av frisgrupper . . . . .	54
6.2	Olika symmetrigrupper för samma mönster? . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Klassifikation av frisgrupper</b>	<b>61</b>
7.1	Elementen i en frisgrupp . . . . .	61
7.2	De sju frisgrupperna . . . . .	63
7.3	Algoritm för frisgrupper . . . . .	68
	<b>Lösningar till udda övningsuppgifter</b>	<b>71</b>

<b>A Geometri</b>	<b>82</b>
A.1 Bevis av Påstående 2.1.8 . . . . .	82
<b>Förslag till vidare läsning</b>	<b>86</b>
<b>Sakregister</b>	<b>88</b>

## Några ord på vägen

Detta kompendium är skrivet för att användas som litteratur till KTH:s MATEMATISKA CIRKEL under läsåret 2013–2014 och består av sju avsnitt. Kompendiet är inte tänkt att läsas enbart på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen på de sju föreläsningarna. En bra idé kan vara att försöka läsa varje kapitel själv innan föreläsningen, så att man redan innan vet vad målet med föreläsningen är och vad som kan visa sig vara svårt.

Som den mesta matematik på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

Till varje kapitel finns ett antal övningsuppgifter. Dessa är dels ordnade efter ungefärlig svårighetsgrad: övningar kan ha en (★), två (★★) eller tre (★★★) stjärnor. Dessutom har de udda övningarna facit längst bak i kompendiet och syftet med dessa är att eleverna ska kunna räkna dem och på egen hand kontrollera att de förstått materialet. De med jämna nummer saknar facit och kan användas som examination. Det rekommenderas dock att man försöker lösa dessa uppgifter även om man inte examineras på dem. Om man kör fast kan man alltid fråga en kompis, en lärare på sin skola eller någon av författarna. Under årets gång kommer det att finnas räknestugor på KTH där eleverna kan räkna uppgifter tillsammans, och få hjälp av oss.

Vi vill dock betona att få av uppgifterna är helt enkla. Detta betyder dels att läsaren inte bör titta i facit efter några få minuter, utan att först prata med kompisar om uppgiften, kanske lägga den åt sidan ett tag och tänka på annat, och sedan försöka lite till. Dessutom innebär det att få av eleverna kommer att kunna klara samtliga uppgifter, så ett krav på att eleven ska ha löst alla uppgifter bör inte ingå i examinationen. Dock rekommenderar vi starkt att alla elever åtminstone tittar på och försöker sig på alla övningar.

De flesta övningar kommer att ha många olika möjliga lösningar och det som står i facit bör endast ses som ett förslag.

KTH:s MATEMATISKA CIRKEL finansieras av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse. Vi tackar Dan Laksov och Roy Skjelnes, Institutionen för Matematik vid KTH, Alan Sola vid University of Cambridge och Dan Petersen vid ETH Zürich för givande kommentarer om denna skrift.

## Några ord om Cirkeln

KTH:S MATEMATISKA CIRKEL, i dagligt tal benämnd Cirkeln, startade 1999. Dess ambition är att sprida kunskap om matematiken och dess användningsområden utöver vad eleverna får genom gymnasiekurser, och att etablera ett närmare samarbete mellan gymnasieskolan och högskolan. Cirkeln skall särskilt stimulera elevernas matematikintresse och inspirera dem till fortsatta naturvetenskapliga och matematiska studier. Lärarna på Cirkeln kan vid behov ge eleverna förslag på ämnen till projektarbeten vid gymnasiet eller förslag till annan förkovran inom matematik.

Till varje kurs skrivs ett kompendium som distribueras gratis till eleverna. Detta material, föreläsningsschema och övriga uppgifter om KTH:S MATEMATISKA CIRKEL finns tillgängligt på

<http://www.math.kth.se/cirkel>

Cirkeln godkänns ofta som en gymnasiekurs eller som matematisk breddning på gymnasieskolorna. Det är upp till varje skola att godkänna Cirkeln som en kurs och det är lärarna från varje skola som sätter betyg på kursen. Lärarna är självklart också välkomna till Cirkeln och många har kommit överens med sin egen skola om att få Cirkeln godkänd som fortbildning eller som undervisning.

Vi vill gärna understryka att föreläsningarna är öppna för alla gymnasieelever, lärare eller andra matematikintresserade.

Vi har avsiktligt valt materialet för att ge eleverna en inblick i matematisk teori och tankesätt och presenterar därför både några huvudsatser inom varje område och bevisen för dessa resultat. Vi har också som målsättning att bevisa alla satser som används om de inte kan förutsättas bekanta av elever från gymnasiet. Detta, och att flera ämnen är på universitetsnivå, gör att lärarna och eleverna kan uppleva programmet som tungt, och alltför långt över gymnasienivån. Meningen är emellertid inte att lärarna och eleverna skall behärska ämnet fullt ut och att lära in det på samma sätt som gymnasiekurserna. Det viktigaste är att eleverna kommer i kontakt med teoretisk matematik och får en inblick i *matematikens väsen*. Vår förhoppning är att lärarna med denna utgångspunkt skall ha lättare att upplysa intresserade elever om KTH:S MATEMATISKA CIRKEL och övertyga skolledarna om vikten av att låta både elever och lärare delta i programmet.

## Några ord om betygssättning

Ett speciellt problem tidigare år har varit betygssättningen. Detta borde emellertid bara vara ett problem om lärarna använder sig av samma standard som de gör när de sätter betyg på ordinarie gymnasiekurser. Om utgångspunkten istället är att eleverna skall få insikt i matematiken genom att gå på föreläsningarna och att eleven gör sitt bästa för att förstå materialet och lösa uppgifterna, blir betygssättningen lättare. Självklart betyder det mycket vad eleverna har lärt av materialet i kursen, men lärarna kan bara förvänta sig att ett fåtal elever behärskar ämnet fullt ut. I det perspektivet blir det lätt att använda de officiella kriterierna:

*Betyg E* eller *Godkänd*: Eleven har viss insikt i de moment som ingår i kursen och kan på ett godtagbart sätt redovisa valda delar av kursen såväl muntligt som skriftligt. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

*Betyg C* eller *Väl godkänd*: Eleven har god insikt i flera moment från kursen. Eleven kan redovisa dessa moment både skriftligt och muntligt och dessutom uppvisa lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

*Betyg A* eller *Mycket väl godkänd*: Eleven har mycket god insikt i flera moment av kursen och lämnar skriftliga redovisningar av flera delar av kursen eller lämnar lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Betyget *B* ges till elever som uppfyllt kraven för betygssteget *C* och en övervägande del av kraven för betygssteget *A*. På samma sätt fås betyget *D* om kraven för *E* är uppfyllda och en övervägande del av kraven för *C*.

Det är också till exempel möjligt att skolorna samarbetar, så att elever från en skola redovisar eller lämnar rapport för en lärare i en annan skola.

Författarna, augusti 2013





# 1 Grundläggande begrepp och bevisföring

I det här kapitlet kommer vi att ge en introduktion till matematisk bevisföring. Innan dess kommer vi dock att introducera lite terminologi. I matematiken använder man ofta *mängder* och *funktioner* som ett bekvämt språk för att beskriva saker och ting, och detta kommer vi också att göra i detta kompendium. Vi börjar därför med att beskriva denna teori.

## 1.1 Mängder

Låt oss titta på ett av de mest grundläggande begreppen i matematiken, nämligen mängder. En *mängd* är en samling objekt, som till exempel tal, och dessa objekt kallar vi för *element* i mängden. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp dess element. Ett sådant exempel är

$$A = \{1, 3, a, 7\}.$$

Detta betyder att  $A$  är en mängd som innehåller elementen  $1, 3, a$  och  $7$ . Vi bryr oss inte om i vilken ordning eller hur många gånger elementen räknas upp och därmed gäller till exempel

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\} = \{1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 3, 2, 4\}.$$

En mängd kan också ha oändligt många element, och då går det inte att skriva ned alla element. Ett exempel på en oändlig mängd är

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

De tre punkterna betyder här att *alla* positiva heltal ingår i mängden.

**Exempel 1.1.1.** Mängden som består av alla udda heltal mellan 0 och 10 kan skrivas som

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}. \quad \blacktriangle$$

Om  $A$  är en mängd och  $x$  är ett element i mängden  $A$  så skriver vi  $x \in A$  och säger att  $x$  *tillhör*  $A$ . Exempelvis gäller  $b \in \{a, b, 10, 3\}$ . Att ett element  $x$  inte tillhör mängden  $A$  skrivs  $x \notin A$ . Den *tomma mängden* innehåller inga element och betecknas  $\emptyset$ .

**Definition 1.1.2.** Låt  $A$  och  $B$  vara mängder. Om alla element i mängden  $A$  också är element i mängden  $B$  så sägs  $A$  vara en *delmängd* till  $B$ . Detta betecknas  $A \subseteq B$ .

**Exempel 1.1.3.** Mängden  $\{1, a\}$  är en delmängd till  $\{1, 3, a\}$ , eftersom alla element i  $\{1, a\}$  finns i mängden  $\{1, 3, a\}$ . Vi skriver  $\{1, a\} \subseteq \{1, 3, a\}$ .  $\blacktriangle$

Ett användbart sätt att beskriva en mängd är som en delmängd av en annan mängd. Det finns ett speciellt skrivsätt för detta, nämligen

$$\{x \in D \mid \text{villkor på } x\}.$$

Med detta menar man delmängden bestående av de element i mängden  $D$  som uppfyller de givna villkoren. Strecket  $|$  utläses ”så att”. Som exempel kan vi definiera

$$B = \{n \in \{1, 2, 3, \dots\} \mid n \text{ är udda,}\}$$

och

$$C = \{y \in \{1, 2, 3, 4\} \mid y > 2\}.$$

Mängden  $B$  är delmängden av de positiva heltalen som består av alla udda positiva heltal, medan  $C$  är delmängden av  $\{1, 2, 3, 4\}$  bestående av element större än 2. Alltså har vi

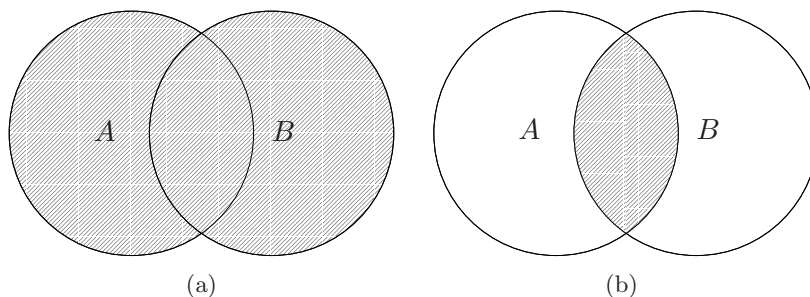
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} \quad \text{och} \quad C = \{3, 4\}.$$

**Exempel 1.1.4.** Låt  $A = \{4, 5, 8, 4711, 12, 18\}$  och  $B = \{x \in A \mid x > 10\}$ . Då är  $B = \{12, 18, 4711\}$  medan  $\{x \in A \mid x < 3\} = \emptyset$ . Vidare har vi att  $4 \in A$  men  $4 \notin B$ . ▲

**Definition 1.1.5.** Antag att  $A$  och  $B$  är mängder. *Unionen* av  $A$  och  $B$  består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas  $A \cup B$ . *Snittet* av  $A$  och  $B$  består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas  $A \cap B$ . *Differensen* av  $A$  och  $B$  består av alla element som ligger i  $A$  men inte ligger i  $B$ , och betecknas  $A \setminus B$ . Mängderna  $A$  och  $B$  kallas för *disjunkta* om  $A \cap B = \emptyset$ .

**Exempel 1.1.6.** Låt  $A = \{1, 3, 5, 6\}$ ,  $B = \{5, 8, 3, 4711\}$  och  $C = \{2, 4, 7, 8\}$ . Då har vi  $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 8, 4711\}$ ,  $A \cap B = \{3, 5\}$ ,  $B \cap C = \{8\}$  och mängderna  $A$  och  $C$  är disjunkta. Dessutom gäller att  $A \setminus B = \{1, 6\}$  och  $B \setminus A = \{8, 4711\}$ . Till skillnad från unionen och snittet är differensen av två mängder inte symmetrisk i  $A$  och  $B$ . ▲

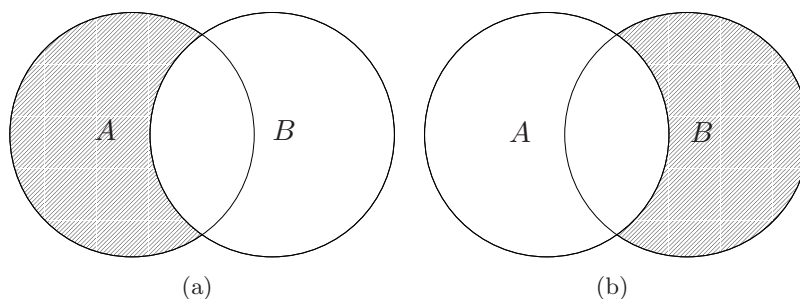
Ett användbart sätt att åskådliggöra union, snitt och differens är med hjälp av så kallade *Vennndiagram*, som visas i Figur 1.1 och Figur 1.2.



**Figur 1.1:** Vennndiagram som åskådliggör mängderna (a)  $A \cup B$  och (b)  $A \cap B$ .

Det är dags att titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de *naturliga talen*  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Denna mängd betecknas  $\mathbb{N}$ . Tar vi med negativa tal får vi heltalen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$



**Figur 1.2:** Venndiagram som åskådliggör (a)  $A \setminus B$  och (b)  $B \setminus A$ .

Beteckningen kommer från tyskans *Zahl* som betyder tal. Mängden av alla kvoter av två heltal  $\frac{p}{q}$  där  $q \neq 0$  innehåller till exempel  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{7}{243}$  och  $\frac{25}{1}$ . Vi kallar mängden de *rationella talen* och betecknar den med  $\mathbb{Q}$ . Slutligen betecknar vi med  $\mathbb{R}$  de *reella talen*, det vill säga alla tal på tallinjen, exempelvis  $0$ ,  $-1$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $-\frac{527}{3}$ ,  $\sqrt{2}$  och  $\pi$ . Notera att

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

**Exempel 1.1.7.** Vi har att  $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$ . ▲

**Exempel 1.1.8.** Mängden  $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2 \cdot k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$  är mängden av alla jämna heltal. Denna mängd kan också skrivas som  $\{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , eller som  $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ . ▲

**Exempel 1.1.9.** Låt oss påpeka att en mängd även kan ha andra mängder bland dess element. Exempelvis kan vi låta

$$A = \{2, 3, \{-1, 1\}, 4\},$$

och vi har att  $\{-1, 1\} \in A$ , det vill säga mängden  $\{-1, 1\}$  är ett element i mängden  $A$ . ▲

## 1.2 Funktioner

Innan vi gör en allmän definition av vad en funktion är kan det vara på sin plats att titta på något välbekant, nämligen en formel som  $f(x) = x^2 + 1$ . Detta är ett exempel på en funktion. Formeln säger att om vi tar ett tal  $x \in \mathbb{R}$  så får vi ett nytt tal  $f(x) \in \mathbb{R}$  genom att göra beräkningen  $x^2 + 1$ ; till exempel får vi  $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ . Vi säger att  $f$  är en funktion från de reella talen till de reella talen eftersom både det vi stoppar in,  $x$ , och det vi får ut,  $f(x)$ , är reella tal. Vi brukar beteckna detta med  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 1.2.1.** Låt  $X$  och  $Y$  vara mängder. En *funktion*  $f: X \rightarrow Y$  är ett sätt att till varje element  $x \in X$  tilldela ett välbestämt element  $y \in Y$ . Vi skriver  $f(x) = y$  och säger att  $x$  *avbildas* på  $y$  och att  $y$  är *bilden* av  $x$ .

**Anmärkning 1.2.2.** Ofta säger man att  $f$  är en funktion från  $X$  till  $Y$  istället för att använda beteckningen  $f: X \rightarrow Y$ . Ett vanligt alternativ till ordet funktion är *avbildning*.

**Exempel 1.2.3.** Betrakta mängderna  $A = \{1, 2, 3\}$  och  $B = \{1, 2, \dots, 100\}$ . Ett exempel på en funktion  $f: A \rightarrow B$  ges av  $f(n) = 2n$  för  $n \in A$ . Vi har alltså att  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$  och  $f(3) = 6$ . Per definition måste vi ha  $f(x) \in B$  för alla  $x \in A$ , och detta gäller ju här eftersom

$$f(1) = 2 \in B, \quad f(2) = 4 \in B \quad \text{och} \quad f(3) = 6 \in B.$$

I detta exempel definieras funktionen  $f$  av formeln  $f(n) = 2n$ , men det är inte alls nödvändigt att det finns en formel som beskriver hur funktionen verkar. Om vi som här har en funktion från den *ändliga* mängden  $A = \{1, 2, 3\}$  kan man till exempel definiera funktionen med hjälp av en tabell:

$n$	$f(n)$
1	2
2	4
3	6

▲

**Exempel 1.2.4.** Låt  $X$  vara en mängd. *Identitetsavbildningen*  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  är funktionen som avbildar varje element i  $X$  på sig själv, det vill säga att  $\text{id}_X(x) = x$  för alla  $x \in X$ . Om mängden är underförstådd så skriver vi ofta bara  $\text{id}$  i stället för  $\text{id}_X$ .

▲

Om man har en funktion från  $X$  till  $Y$  så kan man också vara intresserad av vad funktionen gör med olika delmängder av  $X$ .

**Definition 1.2.5.** Givet en funktion  $f: X \rightarrow Y$  och en delmängd  $Z \subseteq X$  så definierar vi

$$f(Z) = \{y \in Y \mid \text{det existerar ett element } z \in Z \text{ så att } f(z) = y\}$$

att vara *mängden som  $Z$  avbildas på* eller *bilden av  $Z$* . Notera att  $f(Z)$  är en delmängd av  $Y$ .

**Exempel 1.2.6.** Låt  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  vara definierad av  $f(n) = 2n$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$  och betrakta delmängden  $\{1, 7, 10\} \subseteq \mathbb{Z}$ . Då har vi att

$$f(\{1, 7, 10\}) = \{f(1), f(7), f(10)\} = \{2, 14, 20\}.$$

▲

**Definition 1.2.7.** Låt  $X, Y$  och  $Z$  vara mängder med avbildningar  $f: X \rightarrow Y$  och  $g: Y \rightarrow Z$  mellan dem. *Sammanställningen* av  $g$  och  $f$  är funktionen  $g \circ f: X \rightarrow Z$  som ges av  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  för alla  $x \in X$ .

$$\begin{array}{c}
 X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \\
 \quad \quad \quad \curvearrowright \\
 \quad \quad \quad g \circ f
 \end{array}$$

**Anmärkning 1.2.8.** Notera att sammansättningen  $g \circ f$  betyder att man först tillämpar  $f$  och sedan  $g$ , trots att vi läser  $g$  och sedan  $f$ .

**Exempel 1.2.9.** Låt de två funktionerna  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  och  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara definierade av  $f(x) = 2x$  och  $g(x) = x + 1$  för alla  $x \in \mathbb{R}$ . Då gäller att  $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  är funktionen som definieras av

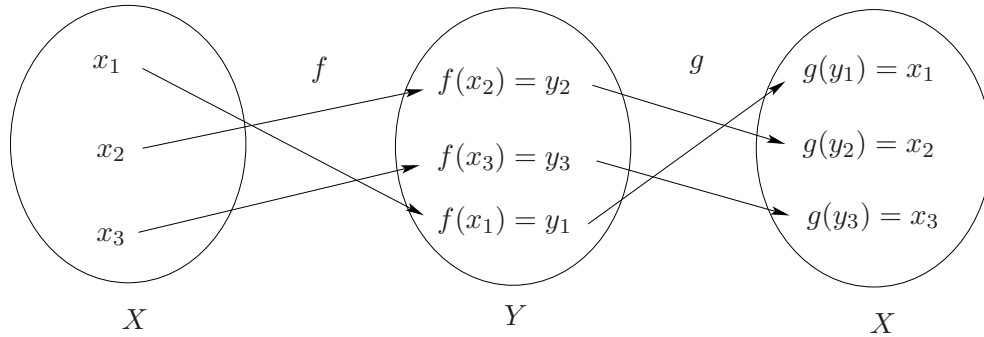
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1.$$

Här kan vi även se på sammansättningen  $f \circ g$  som ges av

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2.$$

Vi noterar att  $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ . ▲

**Definition 1.2.10.** En avbildning  $f: X \rightarrow Y$  mellan mängder  $X$  och  $Y$  är *inverterbar* om det existerar en avbildning  $g: Y \rightarrow X$  så att  $(g \circ f)(x) = x$  och  $(f \circ g)(y) = y$  för alla  $x \in X$  och alla  $y \in Y$ . Avbildningen  $g$  kallas för *inversen* till  $f$  och betecknas med  $f^{-1}$ .



**Figur 1.3:** Illustrering av hur sammansättningen av  $f$  följd av sin invers  $g$  verkar på tre element  $x_1, x_2$  och  $x_3$  i  $X$ .

**Exempel 1.2.11.** Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  som är definierad av  $f(x) = 3x$  är inverterbar med invers  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  given av  $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$  eftersom

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x) = \frac{3x}{3} = x$$

och

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x}{3} = x. \quad \blacktriangle$$

Vi kan även prata om när två till synes olika funktioner är lika.

**Definition 1.2.12.** Två funktioner  $f: X \rightarrow Y$  och  $g: X \rightarrow Y$  är *lika* om  $f(x) = g(x)$  för alla  $x \in X$  och vi skriver då  $f = g$ .

**Exempel 1.2.13.** För att ta ett enkelt exempel som illustrerar detta låter vi  $f$  och  $g$  vara funktioner från  $\mathbb{R}$  till  $\mathbb{R}$ . Antag att  $f$  är definierad av att ta argumentet  $x$ , addera det med 3 och sedan multiplicera summan med 2,

och att  $g$  är definierad av att ta argumentet  $x$ , multiplicera med 2 och sedan addera produkten med 6. Då gäller att  $f = g$  eftersom

$$f(x) = 2 \cdot (x + 3) = 2x + 6 = g(x)$$

för alla  $x \in \mathbb{R}$ . ▲

Senare kommer vi stöta på mindre uppenbara exempel på funktioner som är lika med varandra.

**Anmärkning 1.2.14.** Vi kan med Definition 1.2.12 uttrycka inversen till en funktion  $f: X \rightarrow Y$  som att vara en funktion  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  så att  $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$  och  $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ .

### 1.3 Matematisk bevisföring

Denna kurs kommer i huvudsak att handla om *bevis* av matematiska påståenden; varje föreläsning kommer att innehålla flera bevis, och en majoritet av övningsuppgifterna går ut på att bevisa någonting. Detta innebär antagligen en omställning från tidigare kurser i matematik. Så vad är då ett bevis egentligen? Här är en möjlig definition.

**Definition 1.3.1.** Ett *bevis* av ett *påstående* är en *logisk slutledning* som leder från en överenskommen uppsättning av *antaganden* fram till påståendet.

Det förekommer flera viktiga ord i föregående definition. Låt oss diskutera dem ett i taget.

**Definition 1.3.2.** Ett *påstående* är en logisk utsaga som antingen är sann eller falsk.

**Exempel 1.3.3.** Här är några exempel på påståenden:

- (i)  $2A + 5B > -C^2$ .
- (ii)  $X \subseteq (Y \cap Z)$ .
- (iii) Alla jämna tal är delbara med 2.
- (iv) Alla jämna tal är delbara med 3.

Av dessa vet vi inte om de första två är falska eller sanna, eftersom vi inte vet vad  $A, B, C$  respektive  $X, Y, Z$  betyder. Det tredje påståendet är sant eftersom varje jämnt tal kan skrivas som  $2n$  för något heltal  $n$ . Påstående fyra är dock falskt: ett motexempel ges av det jämna talet 2 som ej är delbart med 3. ▲

**Exempel 1.3.4.** Här är också några exempel på saker som *inte* är påståenden.

- (i)  $x^2 + 6x + 5$

(ii) Mängden av alla jämna tal. ▲

Påståenden kan kombineras på många olika sätt, som påminner om de sätt vi kan skapa nya mängder av gamla genom operationerna  $\cap$ ,  $\cup$  och  $\setminus$ . Till exempel kan vi sätta två påståenden bredvid varandra och skriva ordet "och" emellan, och vi får ett nytt påstående. Ett annat ord man kan sätta mellan två påståenden är "eller". En annan sak man kan göra är att skriva "Det är inte sant att..." före ett påstående, och detta ger också ett nytt påstående.

Men viktigast av alla sätt att skapa nya påståenden ur gamla är kanske följande.

**Definition 1.3.5.** Låt  $P$  och  $Q$  vara två påståenden, till exempel några av de som stod i vår lista. Med  $P \implies Q$  menar vi följande påstående: "om påståendet  $P$  är sant, är även påståendet  $Q$  sant." I ord säger vi att  $P$  *implicerar*  $Q$  eller att  $P$  *medför*  $Q$ . Om  $P \implies Q$  och  $Q \implies P$  så skriver vi att  $P \iff Q$ . I ord säger vi att  $P$  gäller *om och endast om*  $Q$  gäller, alternativt att  $P$  och  $Q$  är *ekvivalenta*.

För varje par av påståenden  $P$  och  $Q$  får vi alltså ett nytt påstående,  $P \implies Q$ . Sanningshalten av  $P \implies Q$  kan utläsas ur Tabell 1.

$P$	$Q$	$P \implies Q$
sant	sant	sant
sant	falskt	falskt
falskt	sant	sant
falskt	falskt	sant

**Tabell 1:** Hur  $P \implies Q$  beror på  $P$  och  $Q$ .

Ur Tabell 1 ses speciellt att  $P \implies Q$  alltid är sant om  $P$  är falskt. Detta kan verka ointuitivt till en början. Ett motiverande exempel för denna princip kan vara följande mening som man kan få höra på en biograf: "Om du har en mobiltelefon med dig, är den avstängd?" Om man inte har sin mobiltelefon med sig skall man alltid svara "Ja", oavsett om man har stängt av den eller inte.

**Exempel 1.3.6.** Det gäller att

$$5a + b = 0 \implies 5a = -b.$$

Här gäller även den omvända implikationen, så vi hade kunnat skriva  $\iff$  i stället för  $\implies$ . Vi har också att

$$5a = -b \implies 5ac = -bc,$$

men här är omvändningen inte nödvändigtvis sann. För att gå från det vänstra påståendet till det högra måste vi nämligen dela med  $c$ , vilket vi inte vet är tillåtet om vi inte vet att  $c \neq 0$ . Vi har dock att

$$5ac = -bc \text{ och } c \neq 0 \implies 5a = -b. \quad \blacktriangle$$

**Exempel 1.3.7.** Påståendet

$$\pi > e \implies (\text{Alla jämna tal är delbara med } 3)$$

är falskt, eftersom det första påstående är sant medan det andra är falskt. Dock är påståendet

$$(\text{Alla jämna tal är delbara med } 3) \implies \pi > e$$

lustigt nog sant enligt vår definition av  $\implies$ . ▲

**Exempel 1.3.8.** För varje påstående  $P$  gäller att påståendet  $P \implies P$  är sant, oavsett om  $P$  är sant eller inte. ▲

**Definition 1.3.9.** En *logisk slutledning* är en sekvens av påståenden

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

med egenskapen att påståendet  $P_i \implies P_{i+1}$  är sant för alla  $i$ .

**Definition 1.3.10.** Ett *antagande* är ett påstående som vi förutsätter är sant. Ibland kallas dessa synonymt för *axiom* eller *postulat*.

Vi vet nu alltså vad ett bevis av ett påstående  $Q$  är: det är en kedja av mindre, enklare påståenden som låter oss dra slutsatsen att  $Q$  är sant, endast utgående ifrån en mindre uppsättning antaganden som vi i förväg har bestämt oss för att starta med.

**Exempel 1.3.11.** *Antag* att  $\frac{3x}{2} = 6$  och att vi vill visa att  $x = 4$ . Låt påstående  $P_1$  vara ” $\frac{3x}{2} = 6$ ”,  $P_2$  vara ” $3x = 12$ ” och  $P_3$  vara ” $x = 4$ ”. Då gäller att påståendet  $P_1 \implies P_2$  är sant eftersom vi kan multiplicera båda leden med 2. På samma sätt har vi att påståendet  $P_2 \implies P_3$  är sant eftersom vi kan dividera båda leden med 3 och  $\frac{12}{3} = 4$ . Därmed har vi skapat en logisk slutledning som visar att *om vi antar att*  $P_1$  är sant så är även  $P_3$  sant. ▲

När vi skriver ett bevis brukar vi dock inte bara skriva en lång följd av påståenden med  $\implies$  mellan – i stället brukar man försöka uttrycka beviset i vanliga ord och meningar. Symbolen  $\implies$  till exempel byts ut mot konstruktioner som ”vilket innebär att...” eller ”eftersom... så...” eller ”från vilket vi drar slutsatsen att...”, och så vidare.

Speciellt värt att nämna är begreppet *motsägelsebevis*. Detta är en speciell beviseteknik där man i stället för att visa att ett påstående  $P$  är sant, så bevisar man att det *inte kan vara falskt*. Med detta menar vi att man börjar med antagandet att  $P$  inte gäller, och försöker att härleda ett påstående som man vet inte stämmer, till exempel att  $0 = 1$ . Enligt Tabell 1 så kan bara ett falskt påstående implicera ett falskt påstående, så vårt antagande att  $P$  inte gällde måste ha varit falskt.

I detta kompendium kommer vi att förutsätta att läsaren känner till följande:



- (i) De olika sorternas tal: heltal, rationella, reella.
- (ii) Operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division, och deras grundläggande räkneregler, såsom att  $a+b = b+a$  eller att  $0 \cdot a = 0$  för alla  $a$ .
- (iii) Elementära geometriska egenskaper, till exempel att två icke-parallella linjer skär varandra i en unik punkt.
- (iv) I några av anmärkningarna och övningarna till Kapitel 2 förekommer de trigonometriska funktionerna *sinus* och *cosinus*. Vi vill dock betona att själva teorin (det vill säga, satserna och bevisen) inte förutsätter kännedom om dessa funktioner och att de övningar där de förekommer även ger tillräckligt mycket information för att kunna lösas oavsett.

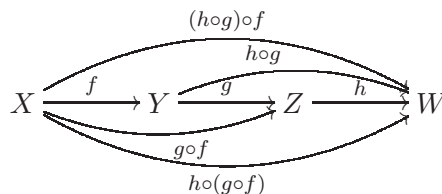
I så stor utsträckning vi bara kan kommer vi att försöka påpeka om vi i ett bevis använder oss av ett antagande som inte står med på denna lista. Det här är inte så lätt som det låter: ofta smyger det sig in ett antagande i ett bevis man inte har tänkt på att man använder, eller så tar man något för givet som egentligen inte är uppenbart.

Vår lista på antaganden är inte så precist formulerad: vi skriver bara "grundläggande räkneregler", men räknar inte upp alla dessa. Vi ber om läsarens overseende.

## 1.4 Ett bevis

Nu när vi lärt oss teorin om hur man utför ett matematiskt bevis ser vi till att tillämpa detta direkt på påståenden om funktioner. Ofta behöver vi använda oss av flera delresultat i loppet av ett bevis. I detta fall är det praktiskt att visa dessa delresultat som oberoende hjälpsatser innan själva huvudsatsen.

**Hjälpsats 1.4.1.** *Låt  $X, Y, Z$  och  $W$  vara mängder, och låt  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  och  $h: Z \rightarrow W$  vara avbildningar. Då gäller att  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .*



*Bevis.* Att visa att dessa två avbildningar är lika är samma sak som att visa att  $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$  för alla  $x \in X$ . Tag därför ett godtyckligt  $x \in X$ . Enligt definitionen för sammansättningen av funktioner gäller då att

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

och

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Så dessa avbildningar är verkligen lika.  $\square$

**Exempel 1.4.2.** Låt  $f(x) = 3x$ ,  $g(x) = x + 1$  och  $h(x) = \frac{x}{2}$  för alla  $x \in \mathbb{R}$  och låt oss betrakta sammansättningarna  $h \circ (g \circ f)$  och  $(h \circ g) \circ f$ . Dessa ska enligt Hjälpsats 1.4.1 vara lika. Vi ser att

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = 3x + 1$$

och därmed får vi att

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(3x + 1) = \frac{3x+1}{2}.$$

Nu betraktar vi den andra sammansättningen och låter  $y = f(x) = 3x$ . Eftersom  $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x + 1) = \frac{x+1}{2}$  så medför det att

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = \frac{y+1}{2} = \frac{3x+1}{2}.$$

De två sammansättningarna ger alltså samma funktion.  $\blacktriangle$

Genom att använda detta resultat kan vi visa följande.

**Sats 1.4.3.** Låt  $f: X \rightarrow Y$  och  $g: Y \rightarrow Z$  vara två inverterbara avbildningar mellan mängderna  $X$ ,  $Y$  och  $Z$ . Då gäller att sammansättningen  $g \circ f: X \rightarrow Z$  är en inverterbar avbildning med invers  $f^{-1} \circ g^{-1}$ .

*Bevis.* Vi behöver alltså visa att avbildningen  $f^{-1} \circ g^{-1}$  har den definierande egenskapen av inversen till  $g \circ f$ , det vill säga att både  $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{id}_Z$  och  $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{id}_X$ .

Vi börjar med att titta på sammansättningen  $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$ . Enligt Hjälpsats 1.4.1 kan vi (i flera steg) flytta på parenteserna till

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}).$$

I och med att  $f^{-1}$  är inversen till  $f$  följer att  $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$  så vi kan byta ut den innersta parenteserna mot  $\text{id}_Y$ . Vi har därmed visat att

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (\text{id}_Y \circ g^{-1}).$$

Dessutom gäller  $\text{id}_Y \circ g^{-1} = g^{-1}$  eftersom

$$(\text{id}_Y \circ g^{-1})(z) = \text{id}_Y(g^{-1}(z)) = g^{-1}(z)$$

för alla  $z \in Z$ . Detta ger alltså att  $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1}$ . Slutligen använder vi oss av att  $g^{-1}$  är inversen till  $g$  som medför att  $g \circ g^{-1} = \text{id}_Z$ . Vi har därmed visat att  $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{id}_Z$ .

På samma sätt visar vi  $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{id}_X$ , se Övning 1.9.  $\square$

Detta sätt att använda sig av abstrakta definierande egenskaper (som här av inversen till en avbildning) kommer vi att tillämpa i flera av bevisen i Kapitel 4 och 5.

## Övningar

**Övning 1.1** (★). Betrakta mängderna  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, \dots\}$  och  $D = \{1, 4, 19, 36, 101\}$ . Bestäm

- (i)  $B \cup C$ ,
- (ii)  $B \cap C$ ,
- (iii)  $D \cap C$ ,
- (iv)  $\{x \in D \mid x \in B\}$ ,
- (v)  $\{x \in A \mid x = y + 1 \text{ för något } y \in D\}$ ,
- (vi)  $\{x + 1 \mid x \in D\}$ .

**Övning 1.2** (★★). Betrakta mängderna  $A = \{1, \{\pi, \star\}, a\}$  och  $B = \{a, \star\}$ .

- (i) Räkna upp alla element i  $A$ .
- (ii) Räkna upp alla delmängder av  $A$ .
- (iii) Vad är  $A \cup B$  och  $A \cap B$ ?

**Övning 1.3** (★★). Låt  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  och låt  $B_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Visa att  $\mathbb{N} = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$ .

**Övning 1.4** (\*\*\*). Låt  $A$  och  $B$  vara mängder. Vart och ett av följande påståenden är ekvivalent till exakt ett annat. Vilka hör ihop?

- (i)  $x \in A$ ,
- (ii)  $A \subseteq B$  och  $B \subseteq A$ ,
- (iii)  $A \subseteq A \cap B$ ,
- (iv) För alla  $x$  gäller:  $x \in A \implies x \notin A$ ,
- (v)  $A \cup B = A$ ,
- (vi)  $A = B$ ,
- (vii)  $A = \emptyset$ ,
- (viii)  $A \subseteq B$ ,
- (ix)  $\{x\} \subseteq A$ ,
- (x) För alla  $x$  gäller:  $x \in B \implies x \in A$ .

**Övning 1.5** (★). Ge ett exempel på en funktion från mängden  $\{1, 2, 3, 4\}$  till mängden  $\{A, B, C\}$ . Hur många olika funktioner  $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{A, B, C\}$  finns det?

**Övning 1.6** (★). (i) Beskriver  $f(x) = \sqrt{x}$  en avbildning från  $\mathbb{R}$  till  $\mathbb{R}$ ?

(ii) Beskriver  $f(a) = \pi$ ,  $f(b) = \star$  och  $f(0) = \sqrt{2}$  en avbildning från mängden  $\{0, a, b, 1\}$  till mängden  $\{\pi, \star, \sqrt{2}\}$ ?

(iii) Beskriver  $f(a) = \pi$ ,  $f(b) = \star$  och  $f(a) = \star$  en avbildning från  $\{a, b\}$  till  $\{\pi, \star, \sqrt{2}\}$ ?

Om svaret är nej, kan du rätta till det så att det blir funktioner?

**Övning 1.7** (★). Avgör vilka av följande utsagor som är påstående enligt vår definition av ett påstående. Vilka av dessa är sanna, vilka är falska, och vilka behöver vi mer information för att avgöra?

(i) Mängden av de naturliga talen.

(ii)  $x$  är ett positivt heltal.

(iii) Talet  $x$  är jämnt.

(iv) Varje mängd innehåller minst ett element.

(v)  $x = 5$ .

(vi)  $z$  är lösningen till ekvationen  $3x + 5 = 11$ .

**Övning 1.8** (★). Använd påståenden från föregående övning och bilda olika sammansatta påståenden på formen  $P \implies Q$ . Hitta minst två sådana påståenden som är sanna respektive falska.

**Övning 1.9** (★). Låt  $f: X \rightarrow Y$  och  $g: Y \rightarrow Z$  vara två inverterbara funktioner. Visa att  $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{id}_X$ . (Jämför med Sats 1.4.3.)

**Övning 1.10** (★). Låt  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  och  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara definierade av  $f(x) = 3x$  och  $g(x) = x + 1$  för alla  $x \in \mathbb{R}$ . Vad är inversen av  $g \circ f$ ?

**Övning 1.11** (★★★). Låt  $X$  vara en mängd och  $f: X \rightarrow X$  och  $g: X \rightarrow X$  vara två funktioner. Visa att  $(f \circ g)(X) = f(g(X))$ . (*Ledning:* Tänk noga på hur mängderna är definierade. Visa att  $(f \circ g)(X) \subseteq f(g(X))$  genom att ta ett element i  $(f \circ g)(X)$  och visa att det ligger i  $f(g(X))$ . Visa på samma sätt att  $f(g(X)) \subseteq (f \circ g)(X)$  och använd detta för att dra slutsatsen att de två mängderna är lika.)

## 2 Planet och dess avbildningar

Målet med detta kompendium är att beskriva symmetrier hos olika tvådimensionella mönster med hjälp av gruppteori. Vi börjar detta kapitel med att definiera den matematiska tolkningen av någonting tvådimensionellt, det vill säga någonting som ligger i det så kallade *talplanet*, för att sedan ge exempel på några mönster som vi kommer titta mer på i senare avsnitt. Slutligen så går vi även igenom ett flertal avbildningar i planet som kommer spela en viktig roll i fortsättningen.

### 2.1 Talplanet

**Definition 2.1.1.** Det *Euklidiska planet*, eller *talplanet*, är mängden

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

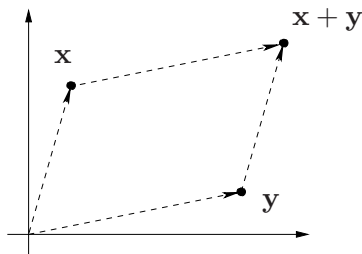
som består av alla par  $(x, y)$  av reella tal  $x$  och  $y$ . Vi skriver  $\mathbf{x} = (x, y)$  och tolkar  $x$  och  $y$  som koordinater till *punkten*  $\mathbf{x}$ .

**Notation 2.1.2.** När vi skriver för hand, till exempel i föreläsningen, drar vi ett streck ovanför bokstaven i stället för att skriva den med fetstil så som  $\bar{\mathbf{x}}$  i stället för  $\mathbf{x}$ .

Vi kan införa en addition på  $\mathbb{R}^2$  genom att för alla punkter  $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$  och  $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$  i planet sätta

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Denna addition av punkter i  $\mathbb{R}^2$  kan visualiseras geometriskt som vi ser i Figur 2.1. Vi börjar med att rita pilar från  $(0, 0)$  till punkterna  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$ . Sedan parallellförflyttar vi en av pilarna och lägger den så att den startar där den andra pilen slutar. Summan  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  ges då av punkten som ligger där den pil som vi flyttade slutar. Vilken av pilarna vi väljer att flytta har ingen betydelse som kan ses i bilden.



**Figur 2.1:** Addition på  $\mathbb{R}^2$ .

**Anmärkning 2.1.3.** Denna addition av punkter beskriver en *algebraisk struktur* på talplanet  $\mathbb{R}^2$ . Vi lägger också märke till att additionen har följande egenskaper.

- För alla punkter  $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$  och  $\mathbf{z} = (x_3, y_3)$  gäller att

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}).\end{aligned}$$

- Punkten  $\mathbf{0} = (0, 0)$ , *origo*, har en speciell egenskap med avseende på denna addition av punkter. Det gäller nämligen att

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x}$$

för alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

- För varje  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  finns elementet  $-\mathbf{x} = (-x, -y)$  som uppfyller

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

I Kapitel 4 kommer vi att undersöka allmänna algebraiska strukturer som uppfyller just dessa egenskaper.

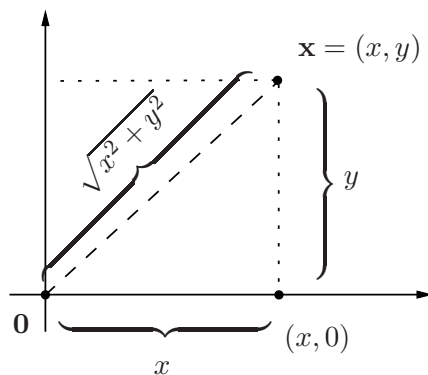
Förutom denna algebraiska struktur har mängden  $\mathbb{R}^2$  även *geometriska* egenskaper såsom det följande avståndsbegreppet.

**Definition 2.1.4.** *Längden*, eller *normen*, av ett element  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ges av

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Anmärkning 2.1.5.** Längden av ett element  $\mathbf{x}$  är alltid ett reellt tal som är större än eller lika med noll. Se även Övning 2.2.

Denna definition kan bättre förstås med hjälp av *Pythagoras sats* och följande bild.

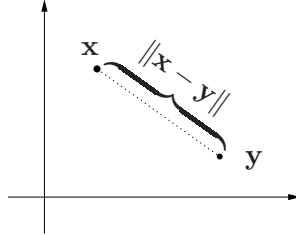


Längden  $\|\mathbf{x}\|$  är alltså lika med längden av hypotenusan i den rätvinkliga triangeln med hörn i punkterna  $\mathbf{0} = (0, 0)$ ,  $(x, 0)$  och  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Därmed kan vi tolka  $\|\mathbf{x}\|$  som längden av sträckan mellan punkterna  $\mathbf{0}$  och  $\mathbf{x}$ , det vill säga avståndet mellan  $\mathbf{0}$  och  $\mathbf{x}$ .

Definition 2.1.4 kan nu användas till att definiera avståndet mellan två godtyckliga punkter  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$  som avståndet av deras differens  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  från origo.

**Definition 2.1.6.** Avståndet mellan två punkter  $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$  och  $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$  i  $\mathbb{R}^2$  är

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

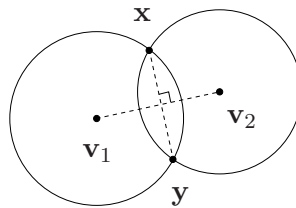


Avstånd mellan punkter kommer vara ett viktigt begrepp i fortsättningen. Till exempel kan vi se att följande geometriska objekt kan förklaras via avstånds-begreppet.

**Exempel 2.1.7.** En *cirkel* med mittpunkt  $\mathbf{v}$  och radie  $r$  är mängden av alla punkter  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  som har avstånd  $r$  från punkten  $\mathbf{v}$ , det vill säga att det är delmängden  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = r\}$  av  $\mathbb{R}^2$ . ▲

Klassisk geometri handlar bland annat om att undersöka skärningar mellan olika cirklar och andra geometriska objekt. Till exempel har vi följande.

**Påstående 2.1.8.** Två cirklar, med två skilda mittpunkter  $\mathbf{v}_1$  och  $\mathbf{v}_2$ , skär varandra i högst två punkter. Vidare, om de skär varandra i två olika punkter  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$  så gäller att linjen genom  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$  är vinkelrät mot linjen genom  $\mathbf{v}_1$  och  $\mathbf{v}_2$ .

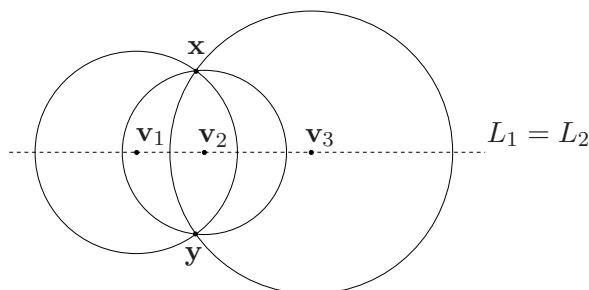


**Figur 2.2:** Två cirklar som skär varandra i två punkter.

Som vi nämnde i Kapitel 1 så är ett påstående en utsaga som är antingen sann eller falsk. Just Påstående 2.1.8 är något som de flesta säkert kan tro på. Likväl behöver påståendet bevisas och vi gör det – utifrån några vanliga grundantaganden inom geometri – i Appendix A. Där kan den intresserade även läsa mer om klassisk geometri. I fortsättningen kommer vi anta att Påstående 2.1.8 är sant från vilket vi kan visa följande.

**Hjälpssats 2.1.9.** Om tre cirklar har två gemensamma skärningspunkter så ligger deras mittpunkter alla på en linje.

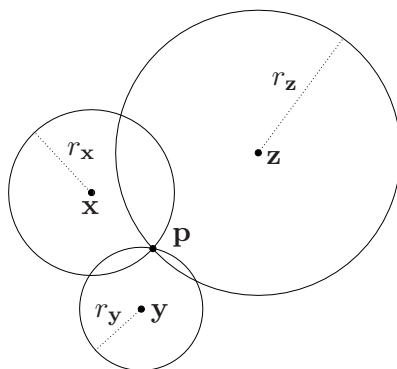
*Bevis.* Tag tre cirklar med mittpunkter i  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  och  $\mathbf{v}_3$  och antag att de har två gemensamma skärningspunkter  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$ . Då gäller från Påståande 2.1.8 att linjen  $L_1$  som går genom  $\mathbf{v}_1$  och  $\mathbf{v}_2$  är vinkelrät mot linjen som går genom  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$ . På samma sätt får vi att även linjen  $L_2$  mellan  $\mathbf{v}_1$  och  $\mathbf{v}_3$  är vinkelrät mot linjen genom  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$ . Så linjerna  $L_1$  och  $L_2$  måste vara parallella och innehålla punkten  $\mathbf{v}_1$ . Två parallella linjer som går igenom samma punkt måste vara lika med varandra och därmed följer det att  $L_1 = L_2$ . Alltså har vi att punkterna  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  och  $\mathbf{v}_3$  alla måste ligga på denna linje.



**Figur 2.3:** Mittpunkterna  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  och  $\mathbf{v}_3$  ligger på en linje. □

**Sats 2.1.10.** Låt  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  vara tre punkter i  $\mathbb{R}^2$  som ej alla ligger på en linje och låt  $r_x, r_y$  och  $r_z$  vara tre reella tal. Då finns det högst en punkt  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  med  $\|\mathbf{p} - \mathbf{x}\| = r_x$ ,  $\|\mathbf{p} - \mathbf{y}\| = r_y$  och  $\|\mathbf{p} - \mathbf{z}\| = r_z$ .

*Bevis.* Antag att  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  har de tre avstånden  $r_x, r_y$  och  $r_z$  till punkterna  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$ . Eftersom vi speciellt har att  $\|\mathbf{p} - \mathbf{x}\| = r_x$  betyder det att  $\mathbf{p}$  ligger på cirkeln med mittpunkt  $\mathbf{x}$  och radie  $r_x$ . På samma sätt ligger  $\mathbf{p}$  på cirkeln med mittpunkt  $\mathbf{y}$  och radie  $r_y$  samt på cirkeln med mittpunkt  $\mathbf{z}$  och radie  $r_z$ . Punkten  $\mathbf{p}$  är alltså en skärningspunkt av dessa tre cirklar. I och med att mittpunkterna  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  enligt vårt antagande inte ligger på en linje har cirkelarna högst en skärningspunkt enligt Hjälpsats 2.1.9 och  $\mathbf{p}$  är därmed den unika skärningspunkten.



**Figur 2.4:** Tre cirklar med mittpunkter  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  som har en unik skärningspunkt  $\mathbf{p}$ . □



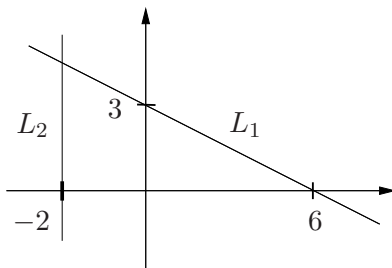
## 2.2 Delmängder av planet

Nu kommer vi ta en första titt på objekten som denna kurs handlar om, nämligen plana mönster. Vi betraktar dessa mönster som delmängder av planet  $\mathbb{R}^2$ . Låt oss börja med ett särskilt enkelt exempel på en delmängd, nämligen en linje.

**Exempel 2.2.1.** En *linje* i planet är en delmängd  $L$  av  $\mathbb{R}^2$  som är på formen

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$$

där  $a, b, c \in \mathbb{R}$  är fixerade tal och någon av  $a$  och  $b$  är nollskild, se Övning 2.5. Om  $b \neq 0$  kan vi skriva om ekvationen som  $y = kx + m$  där  $k = -\frac{a}{b}$  och  $m = -\frac{c}{b}$ . I fallet då  $b = 0$  så är  $a \neq 0$  så vi har istället ekvationen  $ax + c = 0$  som kan skrivas om till  $x = d$  där  $d = -\frac{c}{a}$ . Detta är den vertikala linje som går genom punkten  $(d, 0)$ .



**Figur 2.5:** Linjen  $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y - 6 = 0\}$  och den vertikala linjen  $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 0y + 4 = 0\}$ .



Andra vanliga delmängder ges av cirklar och trianglar som vi redan stött på i de föregående avsnitten. Dessa objekt kan sättas samman till mer invecklade mönster, det vill säga regelbundet upprepade arrangemang. Speciellt är vi intresserade av så kallade fris- och Alhambramönster.

**Definition 2.2.2.** Ett *frismönster* är en delmängd av  $\mathbb{R}^2$  i form av en oändligt lång mönstrad remsa. Mönstret upprepar sig med ett minsta avstånd  $d$ , som inte får vara lika med 0, längs remsans riktning. Att avståndet är minst betyder att mönstret inte upprepar sig med något avstånd mindre än  $d$ .

**Exempel 2.2.3.** Genom att placera oändligt många kopior av figuren



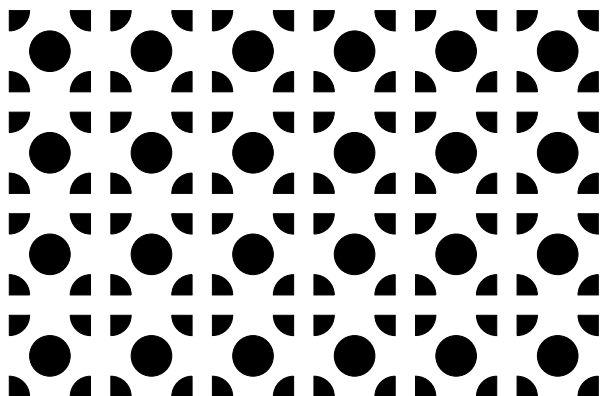
med längd  $d$  bredvid varandra får vi följande oändligt långa mönstrade remsa.



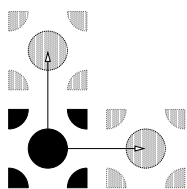
Vi ser att mönstrets struktur upprepar sig med avstånd  $d$  och inget avstånd mindre än  $d$ . Alltså är det ett frismönster. ▲

**Anmärkning 2.2.4.** Tillägget att  $d \neq 0$  utesluter till exempel fallet av en enfärgad remsa.

**Exempel 2.2.5.** Ett *Alhambramönster*, eller *tapetmönster*, är en delmängd av  $\mathbb{R}^2$  som är ett mönster som sträcker ut sig oändligt långt i hela planet och upprepar sin struktur i två olika riktningar, som i följande figur.



Mönstret består av oändligt många kopior av en grundfigur som täcker hela planet. Strukturen upprepar sig både i horisontell och vertikal riktning.



**Figur 2.6:** Grundfiguren upprepas i två riktningar.

Om man är lite uppmärksam kan man upptäcka både fris- och tapetmönster överallt i vardagen, till exempel på vissa husfasader och på kaklet i badrummet. ▲



**Figur 2.7:** Frismönster på fasaden av stadsbiblioteket i Stockholm.



**Figur 2.8:** Två frismönster över trappuppgången vid matematiska institutionen på KTH.

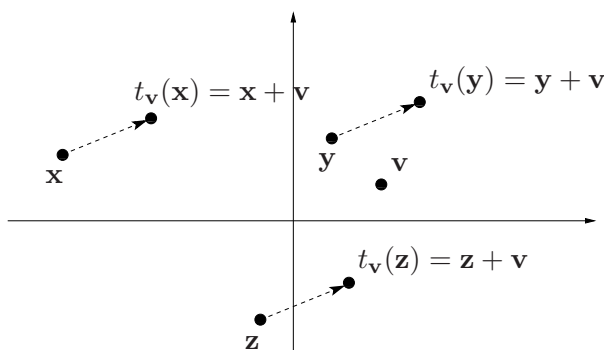
Ett känt exempel på ett Alhambramönster finns på Plattan i Stockholm. Se också Exempel 3.2.5.

### 2.3 Avbildningar i planet

Nu när vi definierat talplanet så vill vi kunna prata om avbildningar i planet. Några typer av avbildningar kommer visa sig vara väldigt viktiga i fortsättningen så vi går igenom dessa här.

**Exempel 2.3.1.** Även om identitetsavbildningen  $\text{id}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  med  $\text{id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  för alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  inte är någon särskilt invecklad avbildning kommer den att spela en viktig roll. ▲

**Definition 2.3.2.** En *translation*, eller *förskjutning*,  $t_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  med  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  är en avbildning som förflyttar alla punkter i planet med elementet  $\mathbf{v}$ . Den definieras av  $t_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}$  för alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .



**Figur 2.9:** Translation av tre punkter  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  i planet med ett element  $\mathbf{v}$ .

**Exempel 2.3.3.** Translation med  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  ger  $t_{\mathbf{v}} = t_{\mathbf{0}} = \text{id}$ . ▲

**Sats 2.3.4.** Låt  $t_{\mathbf{v}}$  och  $t_{\mathbf{w}}$  vara translationerna med  $\mathbf{v}$  respektive  $\mathbf{w}$ . Då gäller att  $t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{w}} = t_{\mathbf{w} + \mathbf{v}}$ . Med andra ord, sammansättningen av två translationer är en translation.

*Bevis.* För alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  gäller att

$$\begin{aligned}(t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{w}})(\mathbf{x}) &= t_{\mathbf{v}}(t_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})) = t_{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \mathbf{w}) = \\ &= (\mathbf{x} + \mathbf{w}) + \mathbf{v} = \mathbf{x} + (\mathbf{w} + \mathbf{v}) = t_{\mathbf{w}+\mathbf{v}}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

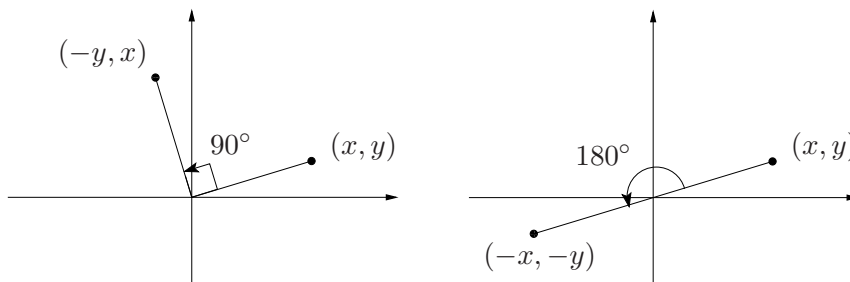
□

**Följsats 2.3.5.** Varje translation  $t_{\mathbf{v}}$  är inverterbar med invers  $t_{\mathbf{v}}^{-1} = t_{-\mathbf{v}}$ .

*Bevis.* Med Sats 2.3.4 följer direkt att både  $t_{\mathbf{v}} \circ t_{-\mathbf{v}} = t_{-\mathbf{v}+\mathbf{v}} = t_{\mathbf{0}} = \text{id}$  och  $t_{-\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{v}} = t_{\mathbf{v}-\mathbf{v}} = t_{\mathbf{0}} = \text{id}$ . Alltså är  $t_{-\mathbf{v}}$  inversen till  $t_{\mathbf{v}}$ . □

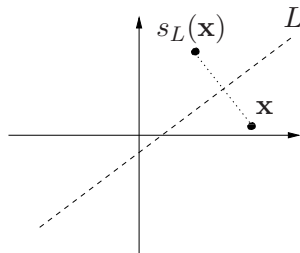
**Definition 2.3.6.** En *rotation runt punkten  $\mathbf{v}$*  är en avbildning  $r_{\mathbf{v},\theta}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  som roterar alla punkter i planet med vinkeln  $\theta$  moturs runt  $\mathbf{v}$ .

**Exempel 2.3.7.** Till exempel ges rotationerna med  $90^\circ$  och  $180^\circ$  runt origo av  $r_{\mathbf{0},90^\circ}(x,y) = (-y,x)$  och  $r_{\mathbf{0},180^\circ}(x,y) = (-x,-y)$ .



▲

**Definition 2.3.8.** En *spegling i en linje  $L$*  är en avbildning  $s_L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  som ges av att vi speglar alla punkter i planet i den givna linjen.



**Exempel 2.3.9.** Speglingen  $s_x$  i  $x$ -axeln ges av  $s_x(x,y) = (x,-y)$  och speglingen  $s_y$  i  $y$ -axeln ges av  $s_y(x,y) = (-x,y)$ . ▲

**Anmärkning 2.3.10.** Vi ser att vi har följande relationer för rotationer och speglingar.

- (i) Inversen av en rotation  $r_{\mathbf{v},\theta}$  ges av att vi roterar lika långt åt andra hållet, det vill säga att  $(r_{\mathbf{v},\theta})^{-1} = r_{\mathbf{v},-\theta}$ .

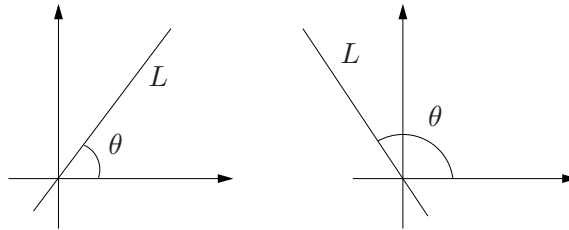
- (ii) Sammansättningen av två rotationer  $r_{\mathbf{v},\theta}$  och  $r_{\mathbf{v},\varphi}$  runt en punkt  $\mathbf{v}$  ges av  $r_{\mathbf{v},\theta} \circ r_{\mathbf{v},\varphi} = r_{\mathbf{v},\theta+\varphi}$  eftersom att först rotera med vinkeln  $\varphi$  och sedan med vinkeln  $\theta$  är samma sak som att rotera med vinkeln  $\theta + \varphi$  direkt. Se även Övning 2.6.
- (iii) Inversen av en spegling  $s_L$  i en linje  $L$  ges av att vi speglar alla punkter en gång till i samma linje, det vill säga att  $(s_L)^{-1} = s_L$ .

**Anmärkning 2.3.11.** Dessutom kan man visa att en rotation med en vinkel  $\theta$  runt origo ges av formeln

$$r_{\mathbf{0},\theta}(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)).$$

En liknande formel finns även för en spegling i en linje  $L$  genom origo med vinkel  $\theta$  till  $x$ -axeln som i Figur 2.10. I detta fall gäller nämligen

$$s_L(x, y) = (x \cos(2\theta) + y \sin(2\theta), x \sin(2\theta) - y \cos(2\theta)).$$



Figur 2.10: Vinkel  $\theta$  mellan linjen  $L$  och  $x$ -axeln.

**Anmärkning 2.3.12.** Vi kan även genomföra en rotation runt en godtycklig punkt  $\mathbf{v}$  på följande sätt. I stället för att direkt rotera runt  $\mathbf{v}$  kan vi först förskjuta alla punkter med  $-\mathbf{v}$ , det vill säga att vi tillämpar translationen  $t_{-\mathbf{v}}$ . Speciellt hamnar då punkten  $\mathbf{v}$  i origo. Sedan kan vi rotera runt origo och slutligen förskjuta tillbaka med  $t_{\mathbf{v}}$ . Med andra ord, vi har  $r_{\mathbf{v},\theta} = t_{\mathbf{v}} \circ r_{\mathbf{0},\theta} \circ t_{-\mathbf{v}}$ .

På samma sätt kan vi genomföra en spegling i en linje som inte går genom origo genom att först translatera linjen så att den går genom origo, sedan spegla i denna nya linje och slutligen translatera tillbaka. För att vara mer precis, antag att  $L$  går genom punkten  $\mathbf{v}$  och låt  $L_0$  vara linjen som är parallell med  $L$  och går genom origo. Då har vi att  $s_L = t_{\mathbf{v}} \circ s_{L_0} \circ t_{-\mathbf{v}}$ .

## Övningar

**Övning 2.1** ( $\star$ ). Tag ett element  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Vad är normen av punkten  $-\mathbf{x} = (-x, -y)$ . Ge en geometrisk förklaring för resultatet.

**Övning 2.2** ( $\star\star$ ). Visa att  $\|\mathbf{x}\| = 0$  om och endast om  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**Övning 2.3** ( $\star$ ). Fixera  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Vad kan vi då säga om avståndet mellan  $\mathbf{x}$  och  $t_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$  för alla punkter  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ?

**Övning 2.4** (\*\*\*). Låt  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  vara tre punkter. Visa att

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

(*Ledning:* Tolka varje term som ett avstånd och rita ut en triangel med dessa punkter som hörn. Dela nu upp triangeln i två mindre rätvinkliga trianglar där man kan jämföra sidolängderna med hjälp av Pythagoras sats.)

**Övning 2.5** (\*). Vad skulle hända om vi tillät att  $a = b = 0$  i definitionen för en linje från Exempel 2.2.1?

**Övning 2.6** (\*\*). Vi gav i Anmärkning 2.3.10 en geometrisk förklaring till varför  $r_{\mathbf{v},\theta} \circ r_{\mathbf{v},\varphi} = r_{\mathbf{v},\theta+\varphi}$ . Använd *additionssatserna*

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \varphi) &= \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi), \\ \sin(\theta + \varphi) &= \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi),\end{aligned}$$

tillsammans med Anmärkning 2.3.11 för att ge ett alternativt bevis för specialfallet  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , det vill säga visa att  $r_{\mathbf{0},\theta} \circ r_{\mathbf{0},\varphi} = r_{\mathbf{0},\theta+\varphi}$ .

**Övning 2.7** (\*\*). Låt  $s_{L_1}$  och  $s_{L_2}$  vara speglingarna i två linjer  $L_1$  och  $L_2$  som går genom origo och har vinklar  $\theta$  och  $\varphi$  till  $x$ -axeln som i Figur 2.10. Använd Anmärkning 2.3.11 och additionssatserna för sinus och cosinus, se Övning 2.6, för att visa att  $s_{L_1} \circ s_{L_2} = r_{\mathbf{0},2\theta-2\varphi}$ . (*Ledning:* De trigonometriska formlerna  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  och  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$  kan behövas.)

**Övning 2.8** (\*). Vad gör sammansättningen av speglingarna  $s_x$  och  $s_y$  som vi såg i Exempel 2.3.9 på ett element  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ? Vad är detta för funktion? Har vi sett den tidigare?

**Övning 2.9** (\*). Låt  $\theta$  vara en vinkel och  $L$  vara en linje genom origo. Använd formlerna för rotation och spegling från Anmärkning 2.3.11 för att visa att

- (i)  $r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{x}) + r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{y}) = r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$  och  $r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{x}) - r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{y}) = r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ,
- (ii)  $s_L(\mathbf{x}) + s_L(\mathbf{y}) = s_L(\mathbf{x} + \mathbf{y})$  och  $s_L(\mathbf{x}) - s_L(\mathbf{y}) = s_L(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ,

för alla  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ .

**Övning 2.10** (\*\*). Låt  $\mathbf{x} = (x, y)$  vara en punkt i planet. Använd formeln för rotationen från Anmärkning 2.3.11 och beräkna längden av bildpunkten  $\|r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{x})\|$ . Ge en geometrisk förklaring för resultatet.

(*Ledning:* Använd att  $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$  för alla vinklar  $\theta$ .)

**Övning 2.11** (\*\*). Låt  $\mathbf{x} = (x, y)$  vara en punkt i planet och  $L$  en linje genom origo. Använd formeln för en spegling i en linje genom origo från Anmärkning 2.3.11 och visa att  $\|s_L(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ .

(*Ledning:* Använd att  $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$  för alla vinklar  $\theta$ .)

### 3 Isometrier och symmetrier

Som vi nämnde i det förra kapitlet är vi intresserade av att undersöka symmetrierna hos olika mönster. För att kunna göra detta ordentligt behöver vi först en matematisk definition för vad en symmetri är.

Vi har redan betraktat vissa avbildningar i talplanet, nämligen translationer, rotationer och speglingar. Alla dessa funktioner visar sig bevara avståndet mellan samtliga punkter i planet. En avbildning med denna egenskap kallas för en *isometri*. Eftersom en sådan funktion bevarar avstånd mellan punkter kommer den även bevara form och storlek av plana figurer. På grund av detta är isometrier särskilt intressanta när man studerar olika mönster. Om en isometri dessutom avbildar en figur på sig själv kallas den för en *symmetri*. I detta kapitel visar vi flera grundläggande egenskaper hos isometrier och symmetrier och hittar symmetrier i olika figurer och mönster.

#### 3.1 Isometrier

Ordet isometri kommer från grekiskan och är en sammansättning av orden *iso* som betyder "lika" och *metri* som betyder "mått". En ungefärlig översättning skulle därför vara "likhet i mått" som syftar på att en sådan avbildning inte ändrar måttet, alltså storleken och formen, av en figur. Vi börjar här med den formella definitionen av en isometri och visar att avbildningarna från Kapitel 2 är isometrier. Dessutom ger vi en konkret beskrivning av alla sådana avbildningar i Sats 3.1.11.

**Definition 3.1.1.** En *isometri* är en avbildning i planet som bevarar avståndet mellan alla punkter, det vill säga en funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  som uppfyller att

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

för alla  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ .

**Exempel 3.1.2.** Låt oss börja med att ge några exempel på isometrier.

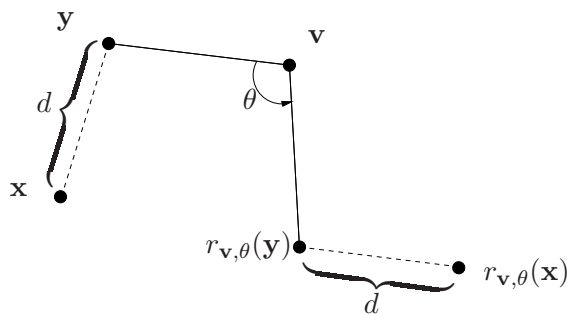
- (i) Identitetsavbildningen  $\text{id}$  som avbildar varje punkt på sig själv är en isometri eftersom

$$\|\text{id}(\mathbf{x}) - \text{id}(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

- (ii) En translation  $t_{\mathbf{v}}$  är en isometri eftersom

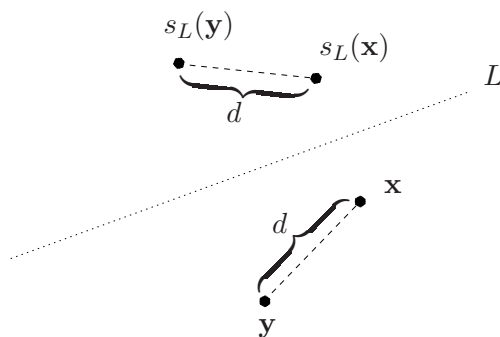
$$\|t_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) - t_{\mathbf{v}}(\mathbf{y})\| = \|(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - (\mathbf{y} + \mathbf{v})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{v} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

- (iii) En rotation  $r_{\mathbf{v}, \theta}$  med en vinkel  $\theta$  runt punkten  $\mathbf{v}$  är en isometri. Detta är sant ty om vi tar två punkter  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$  med ett givet avstånd  $d$  mellan sig så kommer detta avstånd hållas konstant under rotationen. Följande figur illustrerar detta.



Se även beräkningarna i Övning 3.8.

- (iv) På samma sätt kan vi inse att en spegling  $s_L$  i en linje  $L$  är en isometri som vi kan se i följande bild.



Se även Övning 3.9. ▲

**Exempel 3.1.3.** Ett exempel på en avbildning  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  som *inte* är en isometri är multiplikationen med 2, det vill säga  $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} = (2x, 2y)$  för alla  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . För att inse detta kan vi till exempel välja  $\mathbf{x} = (1, 0)$  och  $\mathbf{y} = (0, 0)$ . Då har vi att avståndet mellan  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$  är

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(1, 0) - (0, 0)\| = \|(1, 0)\| = 1$$

samtidigt som avståndet mellan bildpunkterna  $f(\mathbf{x})$  och  $f(\mathbf{y})$  är

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|(2, 0) - (0, 0)\| = \|(2, 0)\| = 2$$

så

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \neq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

vilket betyder att  $f$  ej är en isometri. ▲

**Sats 3.1.4.** *Sammansättningen av två isometrier är en isometri.*

*Bevis.* Låt  $f$  och  $g$  vara två isometrier. Vi behöver alltså visa att även sammansättningen  $f \circ g$  bevarar avstånd. För  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  låter vi  $\mathbf{z} = g(\mathbf{x})$  och  $\mathbf{w} = g(\mathbf{y})$  vara bildpunkterna så att

$$\|(f \circ g)(\mathbf{x}) - (f \circ g)(\mathbf{y})\| = \|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{y}))\| = \|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{w})\|.$$



Avbildningen  $f$  är en isometri och därmed har vi

$$\|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\| = \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\|.$$

Dessutom gäller att  $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  eftersom  $g$  är en isometri. Sammanlagt har vi alltså visat att  $\|(f \circ g)(\mathbf{x}) - (f \circ g)(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ , det vill säga att sammansättningen  $f \circ g$  är en isometri.  $\square$

**Sats 3.1.5.** *Låt  $f$  vara en isometri och antag att  $f$  är inverterbar. Då är även inversen  $f^{-1}$  en isometri.*

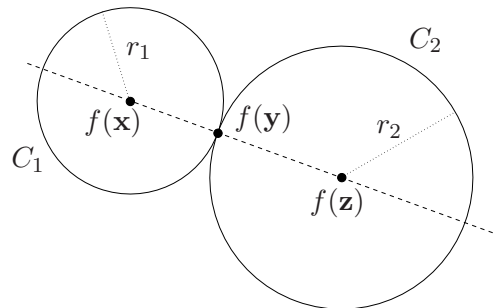
**Anmärkning 3.1.6.** Vi kommer att visa senare i Sats 3.1.12 att varje isometri faktiskt är inverterbar vilket gör antagandet i satsen överflödigt.

*Bevis.* Låt  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  vara två punkter i  $\mathbb{R}^2$ . Även  $\mathbf{z} = f^{-1}(\mathbf{x})$  och  $\mathbf{w} = f^{-1}(\mathbf{y})$  är punkter i planet. Eftersom  $f$  är en isometri gäller  $\|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{z} - \mathbf{w}\|$ . Vi substituerar tillbaka och får  $\|f(f^{-1}(\mathbf{x})) - f(f^{-1}(\mathbf{y}))\| = \|f^{-1}(\mathbf{x}) - f^{-1}(\mathbf{y})\|$ . Dessutom gäller  $f(f^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$  och  $f(f^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$  eftersom  $f^{-1}$  är inversen till  $f$ . Vi har alltså visat att  $\|f^{-1}(\mathbf{x}) - f^{-1}(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ , det vill säga att  $f^{-1}$  är en isometri.  $\square$

Vi har redan sett en rad isometrier i Exempel 3.1.2. Dessutom följer från Sats 3.1.4 att alla sammansättningar av dessa också är isometrier. Detta ger faktiskt samtliga isometrier, vilket vi visar i Sats 3.1.11.

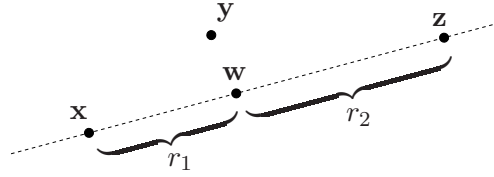
**Hjälpssats 3.1.7.** *Låt  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  vara tre punkter i  $\mathbb{R}^2$ , och låt  $f$  vara en isometri. Om bilderna  $f(\mathbf{x})$ ,  $f(\mathbf{y})$  och  $f(\mathbf{z})$  ligger på en linje så ligger  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  på en linje.*

*Bevis.* Låt  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  vara så att  $f(\mathbf{x})$ ,  $f(\mathbf{y})$  och  $f(\mathbf{z})$  ligger på en linje. Vi kan anta att punkten  $f(\mathbf{y})$  ligger mellan  $f(\mathbf{x})$  och  $f(\mathbf{z})$  på denna linje. Observera att det med  $r_1 = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|$  och  $r_2 = \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})\|$  gäller att  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})\| = r_1 + r_2$ . Speciellt skär cirkeln  $C_1$  med mittpunkt  $f(\mathbf{x})$  och radie  $r_1$  och cirkeln  $C_2$  med mittpunkt  $f(\mathbf{z})$  och radie  $r_2$  varandra i precis en punkt, nämligen i  $f(\mathbf{y})$ .



**Figur 3.1:** Cirklarna skär varandra i punkten  $f(\mathbf{y})$ .

Eftersom  $f$  är en isometri är  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{z})\| = r_1 + r_2$ . Låt  $\mathbf{w}$  vara den punkt på linjen genom  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{z}$  som har avstånd  $r_1$  till  $\mathbf{x}$  och  $r_2$  till  $\mathbf{z}$ .



**Figur 3.2:** Punkten  $\mathbf{w}$  ligger på linjen genom  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{z}$ .

För bilden  $f(\mathbf{w})$  av denna punkt gäller det då att  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\| = r_1$  och  $\|f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{z})\| = \|\mathbf{w} - \mathbf{z}\| = r_2$ . Alltså ligger  $f(\mathbf{w})$  på både  $C_1$  och  $C_2$  och är därmed lika med deras unika skärningspunkt  $f(\mathbf{y})$ , det vill säga att  $f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{z})$ . Men då gäller att

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{y}\| = \|f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y})\| = 0,$$

och från Övning 2.2 har vi därmed att  $\mathbf{w} = \mathbf{y}$ . Alltså ligger  $\mathbf{y}$  på linjen mellan  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{z}$ , vilket skulle visas.  $\square$

**Hjälpsats 3.1.8.** Låt  $f$  och  $g$  vara två isometrier. Antag att det finns tre punkter  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$ , som inte ligger på en linje, så att  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ ,  $f(\mathbf{y}) = g(\mathbf{y})$  och  $f(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z})$ . Då är  $f = g$ .

*Bevis.* Vi behöver visa att  $f(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p})$  för alla punkter  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ . Låt därför  $\mathbf{p}$  vara en punkt i planet, och låt  $r_x$ ,  $r_y$  och  $r_z$  vara dess avstånd till  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$ . Eftersom  $f$  är en isometri gäller att

$$\|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\| = r_x,$$

det vill säga att avståndet mellan  $f(\mathbf{p})$  och  $f(\mathbf{x})$  också är lika med  $r_x$ . På samma sätt ser vi att  $f(\mathbf{p})$  har avståndet  $r_y$  till  $f(\mathbf{y})$  och  $r_z$  till  $f(\mathbf{z})$ .

Då även  $g$  är en isometri har vi dessutom att

$$\|g(\mathbf{p}) - g(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\| = r_x,$$

och eftersom  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$  säger detta att  $g(\mathbf{p})$  har avståndet  $r_x$  till punkten  $f(\mathbf{x})$ . På samma sätt ser vi att  $g(\mathbf{p})$  har avståndet  $r_y$  till  $f(\mathbf{y})$  och avståndet  $r_z$  till  $f(\mathbf{z})$ .

Alltså har både  $f(\mathbf{p})$  och  $g(\mathbf{p})$  avstånden  $r_x$ ,  $r_y$  och  $r_z$  till punkterna  $f(\mathbf{x})$ ,  $f(\mathbf{y})$  och  $f(\mathbf{z})$ , som inte ligger på en linje enligt Hjälpsats 3.1.7. Vi har sett i Sats 2.1.10 att det kan finnas endast en enda punkt med denna egenskap, vilket medför att  $f(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p})$ . Detta gäller för alla punkter  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  vilket ger att  $f = g$ .  $\square$

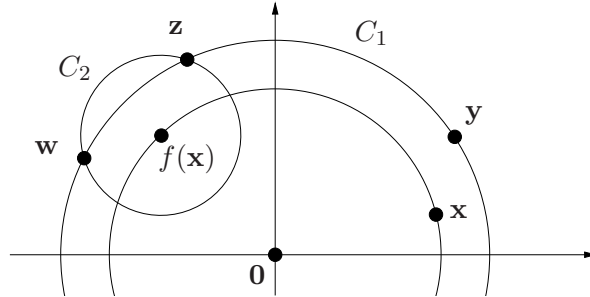
**Hjälpsats 3.1.9.** Låt  $f$  vara en isometri som bevarar origo, det vill säga att  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Då gäller att  $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$  för alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

*Bevis.* Eftersom  $f$  är en isometri gäller  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\|$ . Med  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  har vi dessutom  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})\| = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{0}\| = \|f(\mathbf{x})\|$ . Vi får alltså  $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ , vilket skulle visas.  $\square$

**Sats 3.1.10.** *Låt  $f$  vara en isometri med  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Då är  $f$  antingen en rotation kring origo eller en spegling i en linje genom origo.*

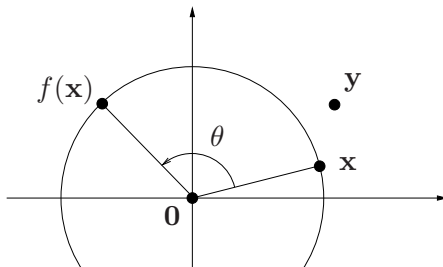
*Bevis.* Tag två punkter  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  som inte ligger på en linje genom origo. Speciellt har vi  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Enligt Hjälpsats 3.1.9 gäller  $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ , det vill säga att punkten  $f(\mathbf{x})$  ligger på cirkeln med mittpunkt  $\mathbf{0}$  och radie  $\|\mathbf{x}\|$ .

Med samma anledning ligger  $f(\mathbf{y})$  på cirkeln  $C_1$  med mittpunkt i origo och radie  $\|\mathbf{y}\|$ . Dessutom måste  $f$  bevara avståndet mellan  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$ . Alltså ligger  $f(\mathbf{y})$  även på cirkeln  $C_2$  med radie  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  och mittpunkt i  $f(\mathbf{x})$ . Med Påstående 2.1.8 följer att det finns högst två skärningspunkter mellan  $C_1$  och  $C_2$ , det vill säga högst två möjliga positioner för  $f(\mathbf{y})$  i relation till  $f(\mathbf{x})$ . Dessutom kan inte  $C_1$  och  $C_2$  ha endast en skärningspunkt eftersom punkterna  $\mathbf{0} = f(\mathbf{0})$ ,  $f(\mathbf{x})$  och  $f(\mathbf{y})$  då skulle ligga på en linje vilket motsäger Hjälpsats 3.1.7. Därmed vet vi att det finns precis två möjligheter för  $f(\mathbf{y})$  i relation till  $f(\mathbf{x})$  och vi kallar dessa punkter för  $\mathbf{w}$  och  $\mathbf{z}$  som i följande figur.

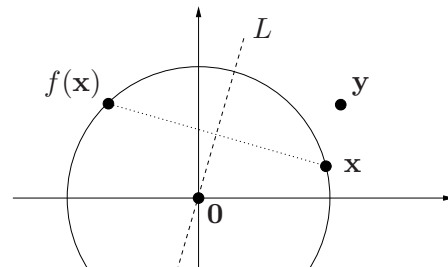


**Figur 3.3:** Cirklarna  $C_1$  och  $C_2$  har två skärningspunkter  $\mathbf{w}$  och  $\mathbf{z}$ .

Observera att det finns en unik rotation  $r_{\mathbf{0},\theta}$  kring origo som avbildar  $\mathbf{x}$  på  $f(\mathbf{x})$  och en unik linje  $L$  genom origo så att speglingen i denna linje avbildar  $\mathbf{x}$  på  $f(\mathbf{x})$ .



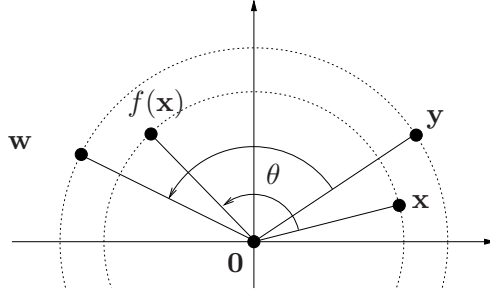
**Figur 3.4:** Rotationen  $r_{\mathbf{0},\theta}$  avbildar  $\mathbf{x}$  på  $f(\mathbf{x})$ .



**Figur 3.5:** Speglingen  $s_L$  avbildar  $\mathbf{x}$  på  $f(\mathbf{x})$ .

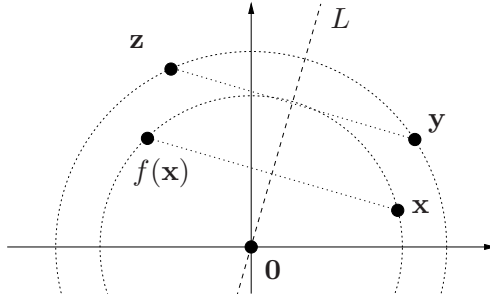
För dessa avbildningar gäller dessutom att  $r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$  och  $s_L(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$ .

Om  $f(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$  gäller alltså att  $r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ ,  $r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{y}) = \mathbf{w} = f(\mathbf{y})$  och  $r_{\mathbf{0},\theta}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$ , vilket medför att  $r_{\mathbf{0},\theta} = f$  enligt Hjälpsats 3.1.8. Därmed har vi i detta fall att  $f$  är en rotation kring origo.



**Figur 3.6:** Rotationen  $r_{\mathbf{0},\theta}$  avbildar  $\mathbf{x}$  på  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{y}$  på  $\mathbf{w}$  och bevarar origo.

Om  $f(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$  följer på samma sätt att  $f$  är lika med speglingen  $s_L$ .



**Figur 3.7:** Spegling  $s_L$  avbildar  $\mathbf{x}$  på  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{y}$  på  $\mathbf{z}$  och bevarar origo.

Vi har alltså visat att  $f$  är antingen en rotation kring origo eller en spegling i en linje genom origo.  $\square$

**Sats 3.1.11.** *Låt  $f$  vara en isometri. Då gäller att  $f = t \circ u$  där  $t$  är en translation och  $u$  är antingen en rotation runt origo eller en spegling i en linje genom origo.*

*Bevis.* Betrakta translationen  $t_{-\mathbf{v}}$ , där  $\mathbf{v} = f(\mathbf{0})$ , som är en isometri enligt Exempel 3.1.2. Med Sats 3.1.4 följer därmed att sammansättningen  $u = t_{-\mathbf{v}} \circ f$  är en isometri. Dessutom gäller

$$u(\mathbf{0}) = (t_{-\mathbf{v}} \circ f)(\mathbf{0}) = t_{-\mathbf{v}}(f(\mathbf{0})) = t_{-\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

det vill säga att isometrin  $u$  bevarar origo. Enligt Sats 3.1.10 vet vi därmed att  $u$  är antingen en rotation runt origo eller en spegling i en linje genom origo. Sammansättning med inversen  $t_{\mathbf{v}} = (t_{-\mathbf{v}})^{-1}$  ger

$$t_{\mathbf{v}} \circ u = t_{\mathbf{v}} \circ (t_{-\mathbf{v}} \circ f) = (t_{\mathbf{v}} \circ t_{-\mathbf{v}}) \circ f = \text{id} \circ f = f.$$

Detta visar att  $f$  kan skrivas som en sammansättning av en translation och en rotation eller en translation och en spegling.  $\square$

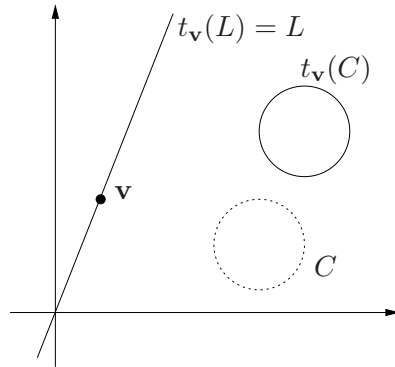
Med hjälp av denna klassificering av isometrierna kan vi nu lätt visa att varje isometri har en invers.

**Sats 3.1.12.** *Varje isometri är inverterbar.*

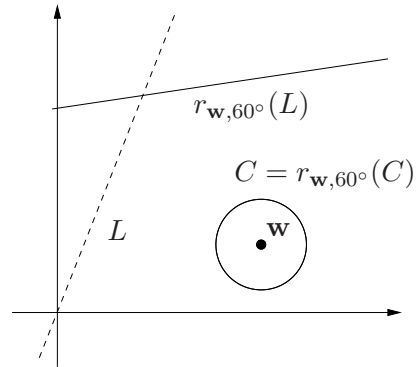
*Bevis.* Vi har redan sett att translationer, rotationer och speglingar är inverterbara. Enligt Sats 3.1.11 är varje isometri en sammansättning av sådana funktioner och därmed själv inverterbar enligt Sats 1.4.3.  $\square$

### 3.2 Symmetrier

Isometrier är alltså avbildningar som bevarar form och storlek av plana figurer och mönster. Till exempel avbildar en isometri en linje på en linje och en cirkel med radien  $r$  på en cirkel med samma radien. Om isometrin är en translation längs med linjens riktning så avbildas dessutom linjen på sig själv. Bilden av cirkeln kommer dock ha en annan mittpunkt. Om däremot isometrin är en rotation runt cirkelns mittpunkt avbildas cirkeln på sig själv samtidigt som bilden av linjen istället är en annan linje.



**Figur 3.8:** Translationen bevarar linjen och ger en annan cirkel.



**Figur 3.9:** Rotationen ger en ny linje och bevarar cirkeln.

*Symmetrierna* av en figur är de isometrier som avbildar figuren på sig själv, det vill säga de isometrier som lämnar figuren helt oförändrad. I exemplen ovan har vi att translationen är en symmetri på linjen och rotationen en symmetri på cirkeln. Ordet symmetri kommer, precis som ordet isometri, från grekiskan och betyder ungefär "samma mått". Notera här att "samma" är ett starkare ord än "likhet" på samma sätt som att "vi har samma kläder på oss" är ett mycket starkare (och oftast felaktigare) påstående än "vi har likadana kläder på oss". Analogt är isometrierna de som avbildar en figur på en figur med likadan form, och symmetrierna de som avbildar en figur på exakt samma figur.

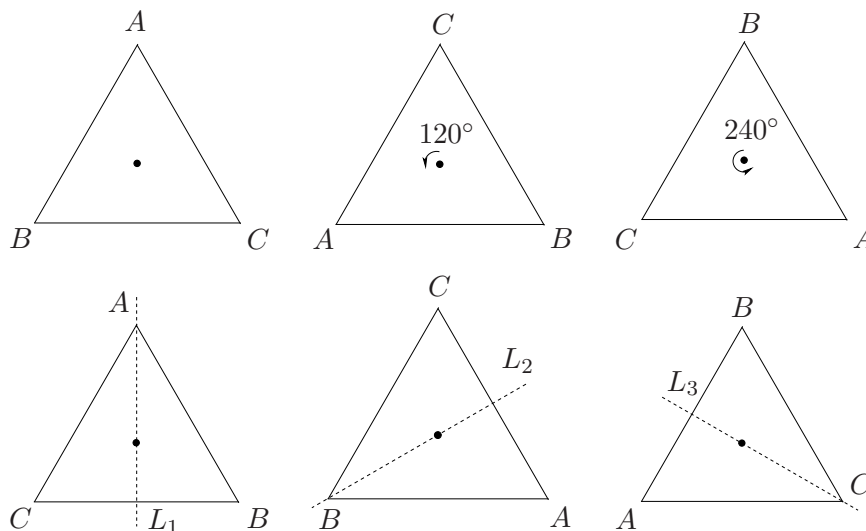
**Definition 3.2.1.** En *symmetri* på en delmängd  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  i planet är en isometri  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sådan att  $f$  avbildar delmängden på sig själv, det vill säga att

$$f(M) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in M\} = M.$$

Mängden av alla symmetrier på delmängden  $M$  betecknar vi  $\text{Sym}(M)$ .

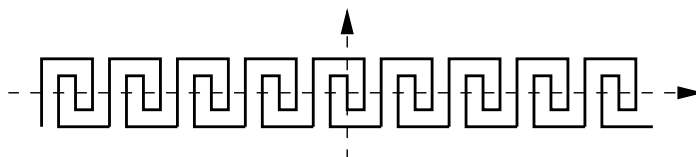
**Exempel 3.2.2.** Identitetsavbildningen  $\text{id}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  är en symmetri på varje delmängd eftersom den är en isometri och  $\text{id}(M) = M$  är uppfyllt per definition för alla delmängder  $M \subseteq \mathbb{R}^2$ . ▲

**Exempel 3.2.3.** Titta på en liksidig triangel med centrum i origo och hörn-punkter  $A, B$  och  $C$ . En symmetri måste avbilda triangeln på sig själv. Som vi såg tidigare är den enklaste symmetrin som vi kan hitta identitetsavbildningen. Vidare kan vi rotera triangeln med  $120^\circ$  och  $240^\circ$ . Roterar vi med  $360^\circ$  så går vi ett helt varv runt vilket blir samma sak som att tillämpa identitetsavbildningen. Utöver rotationer kan vi dessutom spegla i linjerna  $L_1, L_2$  och  $L_3$  som är triangelns medianer, det vill säga linjerna som går igenom ett av hörnen på triangeln och motstående sidas mittpunkt. Däremot finns inte några translationer bland triangelns symmetrier eftersom triangelns hörn måste avbildas på varandra. Vi har alltså hittat sex stycken symmetrier på triangeln, nämligen  $\text{id}, r_{0,120^\circ}, r_{0,240^\circ}, s_{L_1}, s_{L_2}$  och  $s_{L_3}$  som visas i följande figurer.

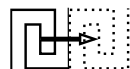


Vi återkommer i Exempel 4.2.2 till symmetrierna hos denna triangel. ▲

**Exempel 3.2.4.** Vi tittar nu en gång till på frismönstret från Exempel 2.2.3.



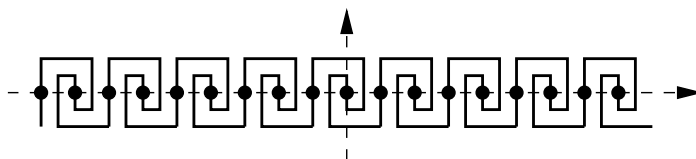
Mönstret består, som vi såg tidigare, av oändligt många kopior av en liten figur. Translationen som fås genom att avbilda hela mönstret med ett steg åt höger så att varje figur hamnar på sin högra granne avbildar hela mönstret på sig själv, så denna translation är en symmetri på frismönstret.



**Figur 3.10:** Translationen som avbildar grundenheten på sin högra granne.

På samma sätt har vi för varje  $n \in \mathbb{Z}$  att translationen med  $n$  steg åt höger också är en symmetri. Observera att  $n$  steg åt höger är en translation åt vänster om  $n$  är negativ. Ett mönster som bevaras under en translation kallas för *translationsinvariant*.

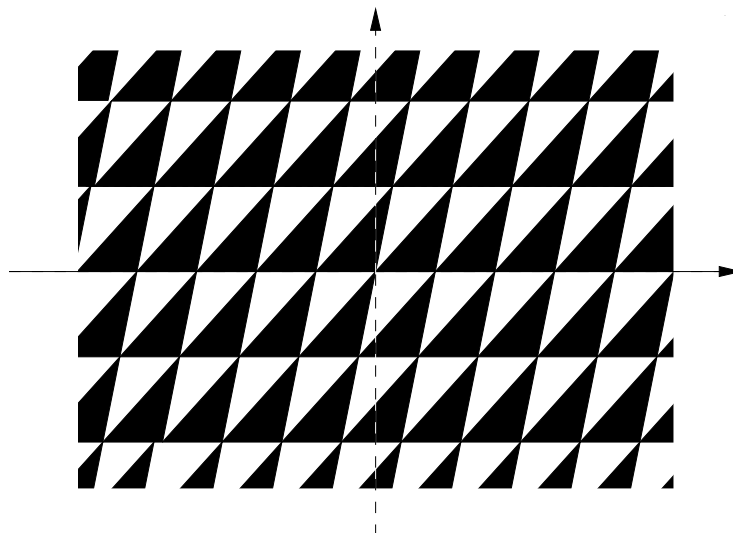
Dessutom ser vi att den lilla figuren är rotationssymmetrisk med  $180^\circ$  i mittpunkten så alla rotationer med  $180^\circ$  kring mittpunkterna av kopiorna är symmetrier av frismönstret. Därutöver kan vi även rotera  $180^\circ$  kring punkterna mellan kopiorna.



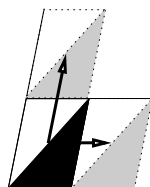
**Figur 3.11:** Centrumpunkterna för rotationssymmetrin.



**Exempel 3.2.5.** Vi undersöker nu symmetrierna hos följande Alhambra-mönster.



Detta mönster är uppbyggt av oändligt många kopior av en liten mönstrad parallelogram. Translationerna längs med parallelogrammens riktning, som i bilden nedan, avbildar varje grundenhet på en av sina grannar och därmed bevaras hela mönstret. Vi ser alltså att det finns translationer i två olika riktningar bland mönstrets symmetrier.



**Figur 3.12:** Två olika translationer som avbildar grundenheten på två av sina grannar.

Dessutom är *alla* translationer som avbildar varje parallelogram på någon annan kopia symmetrier av Alhambramönstret. Eftersom varje symmetri behöver avbilda parallelogrammerna på varandra finns det inga symmetrier förutom de ovan nämnda. ▲

**Sats 3.2.6.** Låt  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  vara en delmängd. Sammansättningen  $f \circ g$  av två symmetrier  $f, g \in \text{Sym}(M)$  är en symmetri på  $M$ .

*Bevis.* Symmetrierna  $f$  och  $g$  är isometrier i synnerhet. Enligt Sats 3.1.4 är därmed sammansättningen  $f \circ g$  också en isometri.

Med Övning 1.11 har vi att  $(f \circ g)(M) = f(g(M))$ . Eftersom  $g$  är en symmetri är  $g(M) = M$  så vi har att  $f(g(M)) = f(M)$ . Slutligen har vi att  $f(M) = M$  eftersom även  $f$  är en symmetri så vi har visat att  $(f \circ g)(M) = M$ .

Därmed är  $f \circ g$  en isometri som avbildar  $M$  på sig själv, det vill säga att  $f \circ g$  är en symmetri. □

**Sats 3.2.7.** Låt  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  vara en delmängd. Varje symmetri  $f \in \text{Sym}(M)$  är inverterbar och inversen  $f^{-1}$  är en symmetri.

*Bevis.* Symmetrin  $f$  är en isometri och har därmed enligt Sats 3.1.12 en invers  $f^{-1}$  som också är en isometri, se Sats 3.1.5.

För att beräkna  $f^{-1}(M)$  använder vi att  $f$  är en symmetri vilket ger att  $f(M) = M$ . Då gäller nämligen att  $f^{-1}(M) = f^{-1}(f(M))$ . Med Övning 1.11 följer att  $f^{-1}(f(M)) = (f^{-1} \circ f)(M)$ . Slutligen har vi  $f^{-1} \circ f = \text{id}$  och därmed att

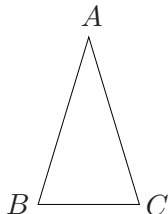
$$f^{-1}(M) = f^{-1}(f(M)) = (f^{-1} \circ f)(M) = \text{id}(M) = M.$$

Alltså är  $f^{-1}$  en isometri som avbildar  $M$  på sig själv, det vill säga en symmetri på  $M$ . □

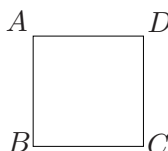


## Övningar

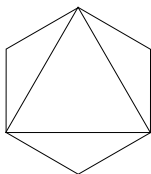
**Övning 3.1** (★). Vilka symmetrier har följande likbenta triangel?



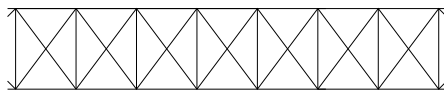
**Övning 3.2** (★). Hur många symmetrier har kvadraten nedan? Vilka är de?



**Övning 3.3** (★). Vilka symmetrier har en regelbunden hexagon med en liksidig triangel inuti som i följande figur?



**Övning 3.4** (★). Hitta åtminstone tre olika symmetrier till frismönstret nedan som inte ges av rena translationer.



**Övning 3.5** (★★). Låt  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara en isometri. Visa att om  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  så gäller att  $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$ .

**Övning 3.6** (★★). Låt  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara en isometri.

- (i) Om  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $f(1, 0) = (1, 0)$  och  $f(1, 1) = (1, 1)$ , visa att  $f = \text{id}$ .
- (ii) Om  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $f(1, 0) = (-1, 0)$  och  $f(0, 1) = (0, 1)$ , visa att  $f = s_y$ .

**Övning 3.7** (★★★). Låt  $L$  vara en linje som går genom origo.

- (i) Vad ger påståendet att linjen går genom origo för krav på  $a$ ,  $b$  och  $c$  i definitionen av en linje från Exempel 2.2.1?
- (ii) För vilka  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  gäller att  $t_{\mathbf{v}}$  är en symmetri på linjen?

**Övning 3.8** (\*\*\*). Vi gav i Exempel 3.1.2 ett geometriskt argument till varför rotationer är isometrier. Visa här att varje rotation  $r_{\mathbf{v},\theta}$  är en isometri genom att i stället visa dessa två delproblem.

- (i) Använd formeln för en rotation runt origo från Anmärkning 2.3.11 för att visa att varje rotation  $r_{\mathbf{0},\theta}$  är en isometri. (*Ledning:* Använd Övning 2.9 och Övning 2.10.)
- (ii) Använd resultatet från (i) tillsammans med Anmärkning 2.3.12 för att visa att en rotation  $r_{\mathbf{v},\theta}$  runt en punkt  $\mathbf{v}$  är en isometri.

**Övning 3.9** (\*\*\*). Vi gav i Exempel 3.1.2 ett geometriskt argument till varför speglingar är isometrier. Visa här att varje spegling  $s_L$  i en linje  $L$  är en isometri genom att i stället lösa dessa två delproblem.

- (i) Använd formeln för en spegling i en linje genom origo från Anmärkning 2.3.11 för att visa att varje spegling  $s_L$  i en linje  $L$  som går genom origo är en isometri. (*Ledning:* Använd Övning 2.9 och Övning 2.11.)
- (ii) Använd resultatet från del (i) tillsammans med Anmärkning 2.3.12 för att visa att en spegling  $s_L$  i en linje  $L$  är en isometri.

## 4 Grupper

För att uppnå målet med den här kursen, nämligen att matematiskt beskriva och klassificera symmetrierna på frismönster kommer vi använda oss av en allmän teori om algebraiska strukturer.

Vi har sett i Kapitel 3 att mängden av symmetrier på ett mönster har egenskapen att sammansättningen av två symmetrier ger en symmetri samt att inversen av en symmetri är en symmetri. En mängd med sådana egenskaper kallas för en *grupp*. Vi börjar med att formellt definiera grupper och titta på många, mer eller mindre abstrakta, exempel för att sedan gå vidare och visa flera allmänna egenskaper hos grupper.

### 4.1 Definition och några exempel

**Definition 4.1.1.** En *grupp*  $(G, *)$  ges av en mängd  $G$  och en operation  $*$  som till varje två element  $g_1, g_2$  i  $G$  ger ett nytt element  $g_1 * g_2$  i  $G$  så att följande *gruppaxiom* gäller.

- (i) (Associativitet). Det gäller att  $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$  för alla element  $g_1, g_2, g_3 \in G$ .
- (ii) (Neutralt element). Det finns ett element  $e \in G$  så att  $e * g = g$  och  $g * e = g$  för alla  $g \in G$ .
- (iii) (Inverst element). För alla  $g \in G$  finns det ett element  $g^{-1} \in G$  så att  $g^{-1} * g = e$  och  $g * g^{-1} = e$ .

**Anmärkning 4.1.2.** Vi kan tänka på operationen  $*$  som addition eller multiplikation i mängden  $G$ . Framöver kommer vi kalla operationen för en multiplikation och säga att  $g_1 * g_2$  är *produkten* av  $g_1$  och  $g_2$ .

När det inte finns någon tvetydighet skriver vi endast  $G$  för gruppen (utan att nämna multiplikationen  $*$ ).

**Anmärkning 4.1.3.** Notera att vi *inte* kräver att  $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$  för alla  $g_1, g_2 \in G$ . En grupp som har även denna egenskap kallas för *abelsk* eller *kommutativ*.

**Notation 4.1.4.** Som med den vanliga multiplikationen skriver vi

$$g^n = \underbrace{g * g * \dots * g}_{n \text{ gånger}}$$

Dessutom sätter vi  $g^0 = e$ .

**Exempel 4.1.5.** En bekant grupp är mängden av heltalen  $\mathbb{Z}$  med den vanliga additionen  $+$ . Vi har nämligen följande egenskaper.

- (i) För alla heltal  $n, m, p \in \mathbb{Z}$  gäller att  $(n + m) + p = n + (m + p)$ .

- (ii) För alla  $n \in \mathbb{Z}$  gäller att  $0 + n = n = n + 0$ . Alltså är 0 ett neutralt element.
- (iii) För alla  $n \in \mathbb{Z}$  gäller att  $n + (-n) = 0 = (-n) + n$ . Elementet  $-n$  är därmed ett invers element till  $n$ . ▲

**Exempel 4.1.6.** Heltalen med den vanliga multiplikationen är ingen grupp!

- (i) För alla heltal  $n, m, p \in \mathbb{Z}$  gäller att  $(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$ .
- (ii) För alla  $n \in \mathbb{Z}$  gäller att  $1 \cdot n = n = n \cdot 1$ . Alltså är 1 ett neutralt element (med avseende på multiplikationen).
- (iii) Till varje heltal  $n \in \mathbb{Z}$  behöver vi alltså hitta ett tal  $n^{-1}$  så att  $n^{-1} \cdot n = 1$ , det vill säga  $n^{-1} = \frac{1}{n}$ . Men till exempel finns inte bråktalet  $\frac{1}{2}$  med i  $\mathbb{Z}$ .

Problemet är alltså att det inte finns någon multiplikativ invers till något heltal förutom 1 och  $-1$ . ▲

**Exempel 4.1.7.** Betrakta mängden  $\{0, 1\}$  med multiplikationen som definieras enligt följande tabell.

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

Elementet i rad "1" och kolonn "0" anger produkten  $1 * 0 = 1$ . Vi kommer nu visa att  $(\{0, 1\}, *)$  utgör en grupp.

För att visa associativitet behöver vi gå igenom samtliga kombinationer av tre element  $g_1, g_2, g_3 \in \{0, 1\}$ . Genom att läsa av i tabellen ser vi att

$$\begin{aligned}
 (0 * 0) * 0 &= 0 * 0 = 0 * (0 * 0), \\
 (0 * 0) * 1 &= 0 * 1 = 0 * (0 * 1), \\
 (0 * 1) * 0 &= 1 * 0 = 1 = 0 * 1 = 0 * (1 * 0), \\
 (1 * 0) * 0 &= 1 * 0 = 1 * (0 * 0), \\
 (0 * 1) * 1 &= 1 * 1 = 0 = 0 * 0 = 0 * (1 * 1), \\
 (1 * 0) * 1 &= 1 * 1 = 1 * (0 * 1), \\
 (1 * 1) * 0 &= 0 * 0 = 0 = 1 * 1 = 1 * (1 * 0), \\
 (1 * 1) * 1 &= 0 * 1 = 1 = 1 * 0 = 1 * (1 * 1).
 \end{aligned}$$

Dessutom gäller att  $0 * g = g = g * 0$  för  $g \in \{0, 1\}$ , som visar att 0 är ett neutralt element. Slutligen följer från  $0 * 0 = 0$  och  $1 * 1 = 0$  att båda elementen 0 och 1 har ett invers element, nämligen sig självt. ▲

I denna kurs har vi redan sett flera exempel på grupper utan att veta om det.

**Exempel 4.1.8.** Talplanet  $\mathbb{R}^2$  är en grupp under addition vilket vi såg i Anmärkning 2.1.3. ▲

**Exempel 4.1.9** (Isometrigruppen). Betrakta mängden av isometrier i planet. Denna mängd utgör faktiskt en grupp med multiplikationen  $*$  given av sammansättning av funktioner, det vill säga att  $f * g = f \circ g$  för alla isometrier  $f$  och  $g$ . Enligt Sats 3.1.4 är sammansättningen av två isometrier en isometri. Associativitet gäller enligt Hjälpsats 1.4.1 och det neutrala elementet är identitetsavbildningen  $\text{id}$ . Dessutom har varje isometri en invers som är en isometri, se Sats 3.1.12 och Sats 3.1.5. ▲

## 4.2 Symmetrigrupper

I denna kurs kommer vi huvudsakligen vara intresserade av grupper som beskriver symmetrierna på vissa objekt.

**Sats 4.2.1.** Låt  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  vara en delmängd av talplanet. Mängden  $\text{Sym}(M)$  som består av alla symmetrier på  $M$  utgör en grupp där multiplikationen av två element  $f, g \in \text{Sym}(M)$  ges av sammansättningen  $f \circ g$ .

*Bevis.* Vi har sett i Sats 3.2.6 att sammansättningen  $f \circ g$  av två symmetrier  $f, g \in \text{Sym}(M)$  är en symmetri och därmed ett element av  $\text{Sym}(M)$ .

Eftersom symmetrier är funktioner gäller associativitet enligt Hjälpsats 1.4.1.

Identitetsavbildningen  $\text{id}$  är det neutrala elementet ty den ligger i  $\text{Sym}(M)$  enligt Exempel 3.2.2 och  $f \circ \text{id} = f = \text{id} \circ f$  för alla  $f \in \text{Sym}(M)$ .

Slutligen har alla  $f \in \text{Sym}(M)$  en invers  $f^{-1} \in \text{Sym}(M)$  enligt Sats 3.2.7. □

Vi börjar med att titta på en enkel geometrisk figur, nämligen en liksidig triangel.

**Exempel 4.2.2** (Symmetrierna på en liksidig triangel). Titta nu på mängden av symmetrierna på en liksidig triangel med mittpunkt i origo. Som vi såg i Exempel 3.2.3 finns speglingarna  $s_1 = s_{L_1}$ ,  $s_2 = s_{L_2}$  och  $s_3 = s_{L_3}$  i triangelns medianer, rotationen  $r_1 = r_{\mathbf{0}, 120^\circ}$  med  $120^\circ$ , rotationen  $r_2 = r_{\mathbf{0}, 240^\circ}$  med  $240^\circ$  och identitetsavbildningen  $\text{id}$ . Enligt Sats 4.2.1 utgör triangelns symmetrier en grupp och vi kan också verifiera detta genom konkreta beräkningar. Låt nämligen  $S = \{\text{id}, s_1, s_2, s_3, r_1, r_2\}$ . Vi vill visa att  $(S, \circ)$  är en grupp. Först visar vi att sammansättningen  $f \circ g$  ligger i  $S$  för samtliga element  $f, g \in S$ .

Vi påminner oss att två speglingar i samma linje ger identiteten, det vill säga

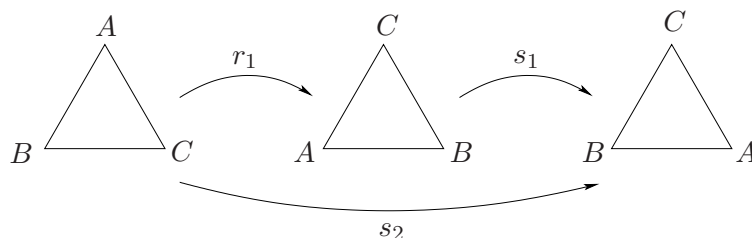
$$s_1^2 = s_1 \circ s_1 = \text{id}, \quad s_2^2 = \text{id} \quad \text{och} \quad s_3^2 = \text{id}.$$

Speciellt betyder detta att varje spegling är sin egen invers, det vill säga  $(s_i)^{-1} = s_i$  för  $i = 1, 2, 3$ . Att utföra rotationen  $r_1$  två och tre gånger ger rotationer med  $2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$  och  $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ , alltså

$$r_1^2 = r_2 \quad \text{och} \quad r_1^3 = \text{id}.$$

Observera att vi i och med detta även kan räkna ut produkten  $r_2^2$ . Vi har nämligen  $r_2^2 = (r_1^2)^2 = r_1^4 = r_1 \circ (r_1^3) = r_1 \circ \text{id} = r_1$ . Att det är samma sak att använda  $r_1$  en gång som att använda  $r_2$  två gånger kan också ses via att  $2 \cdot 240^\circ = 480^\circ$  är lika med  $120^\circ$  på en cirkel eftersom de skiljer sig åt med  $360^\circ$  vilket motsvarar ett helt varv.

Med hjälp av Figur 4.1 ser vi att  $s_1 \circ r_1 = s_2$ .



**Figur 4.1:** Sammansättningen  $s_1 \circ r_1 = s_2$

Denna ekvation kan även användas för att beräkna produkterna  $s_1 \circ s_2$  och  $s_2 \circ r_2$ . Det gäller nämligen att  $s_1 \circ s_2 = s_1 \circ (s_1 \circ r_1) = (s_1 \circ s_1) \circ r_1 = \text{id} \circ r_1 = r_1$ . Dessutom har vi  $s_2 \circ r_2 = (s_1 \circ r_1) \circ r_2 = s_1 \circ (r_1 \circ r_2) = s_1 \circ \text{id} = s_1$ . Det gäller alltså att

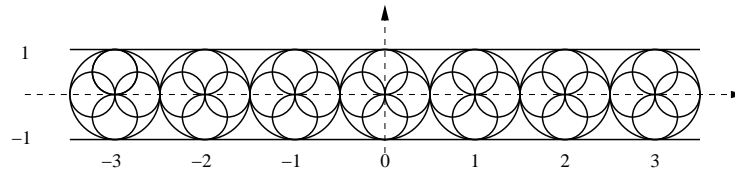
$$s_1 \circ r_1 = s_2, \quad s_1 \circ s_2 = r_1 \quad \text{och} \quad s_2 \circ r_2 = s_1.$$

Vi sammanfattar våra beräkningar i en *multiplikationstabell* som i Exempel 4.1.7. Vi skriver produkten  $s_1 \circ r_1$  i rad  $s_1$  och kolonn  $r_1$ .

$\circ$	id	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$r_1$	$r_2$
id	.	.	.	.	.	.
$s_1$	.	id	$r_1$	.	$s_2$	.
$s_2$	.	.	id	.	.	$s_1$
$s_3$	.	.	.	id	.	.
$r_1$	.	.	.	.	$r_2$	.
$r_2$	.	.	.	.	.	$r_1$

På samma sätt räknar vi ut alla återstående produkter, se Övning 4.4, och ser att det endast förekommer element från mängden  $S = \{\text{id}, s_1, s_2, s_3, r_1, r_2\}$  i tabellen. Med andra ord, sammansättningen av två element i  $S$  ligger i  $S$ . Dessutom kommer vi kunna läsa av att id är det neutrala elementet. Att elementet id förekommer i varje rad och kolonn visar slutligen att alla element har en invers i  $S$ . Därmed har vi visat att  $(S, \circ)$  verkligen är en grupp.  $\blacktriangle$

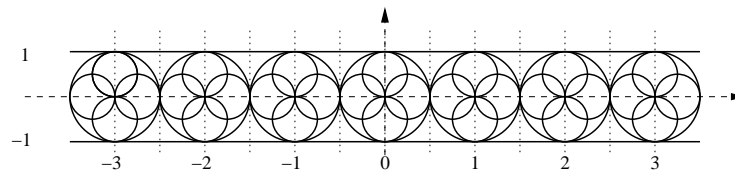
**Exempel 4.2.3** (Symmetrier hos ett frismönster). Nu betraktar vi symmetrierna hos mönstret i Figur 4.2.



Figur 4.2: Frismönster

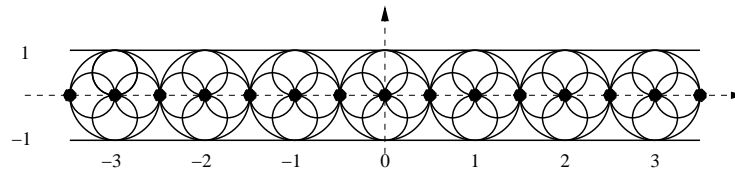
Här hittar vi oändligt många symmetrier:

- Identitetsavbildningen  $\text{id}$  som är en symmetri på alla mönster.
- Alla translationer med längd 1, 2, 3, ... till vänster eller höger, det vill säga avbildningarna  $t_{(n,0)}$  med  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Speglingen  $s_x$  i  $x$ -axeln och alla sammansättningar  $t_{(n,0)} \circ s_x$ .
- Speglingarna i de vertikala linjerna som går igenom punkterna med  $x$ -koordinat  $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \dots$ . Det vill säga att vi har speglingar i linjerna  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \frac{n}{2} = 0\}$  där  $n \in \mathbb{Z}$ .



Figur 4.3: Spegelsymmetriaxlarna

- För alla  $n \in \mathbb{Z}$  har vi rotationen  $r_{(\frac{n}{2},0),180^\circ}$  med  $180^\circ$  i punkten  $(\frac{n}{2}, 0)$ . Speciellt är rotationen  $r_{\mathbf{0},180^\circ}$  i origo en symmetri.



Figur 4.4: Centrumpunkterna för rotationssymmetrin

Sammansättningar av två symmetrier är en symmetri enligt Sats 3.2.6. Vi påstår att sammansättningen av varje två element på vår lista redan finns med bland de ovan nämnda och att dessa verkligen är alla symmetrier av mönstret, det vill säga att symmetrigruppen består av precis dessa element. Detta verifierar vi i Avsnitt 5.3. ▲

### 4.3 Några egenskaper hos grupper

I detta avsnitt tittar vi på några allmänna egenskaper hos grupper som följer direkt från gruppaxiomen. Till exempel medför de att det neutrala elementet är unikt även om vi i definitionen inte uttryckligen utesluter att det finns flera neutrala element.

**Sats 4.3.1.** *Låt  $(G, *)$  vara en grupp. Då är det neutrala elementet  $e \in G$  unikt.*

*Bevis.* Antag att det finns två element  $e$  och  $\tilde{e}$  så att  $e * g = g = g * e$  och  $\tilde{e} * g = g = g * \tilde{e}$  för alla element  $g \in G$ . Vi tittar nu på produkten  $e * \tilde{e}$ . Genom att sätta  $g = \tilde{e}$  i den första ekvationen följer  $e * \tilde{e} = e$ . På samma sätt ger  $g = e$  i den andra ekvationen att  $e * \tilde{e} = e$ . Det gäller alltså att  $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$ , det vill säga att  $e = \tilde{e}$ .  $\square$

På ett liknande sätt följer att varje gruppelement har en unik invers.

**Sats 4.3.2.** *Låt  $(G, *)$  vara en grupp och  $g \in G$  ett element. Då finns det ett unikt element  $g^{-1} \in G$  så att  $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$ .*

*Bevis.* Antag att det finns två sådana element  $g^{-1}$  och  $\hat{g}$ . Genom att använda egenskapen hos det neutrala elementet ser vi att  $g^{-1} = g^{-1} * e$ . Insättning av  $e = g * \hat{g}$ , vilket gäller eftersom  $\hat{g}$  är invers till  $g$ , ger att  $g^{-1} * e = g^{-1} * (g * \hat{g})$ . Från associativiteten har vi att  $g^{-1} * (g * \hat{g}) = (g^{-1} * g) * \hat{g}$  och eftersom  $g^{-1}$  är invers till  $g$  gäller också att  $g^{-1} * g = e$ . Sammanfattningsvis följer det att

$$g^{-1} = g^{-1} * e = g^{-1} * (g * \hat{g}) = (g^{-1} * g) * \hat{g} = e * \hat{g} = \hat{g},$$

vilket skulle visas.  $\square$

**Sats 4.3.3** (Räkneregler). *Låt  $(G, *)$  vara en grupp.*

- (i) *Låt  $g_1, g_2 \in G$ . Då gäller det att  $(g_1 * g_2)^{-1} = g_2^{-1} * g_1^{-1}$ .*
- (ii) *Det gäller att  $e^{-1} = e$ .*
- (iii) *Låt  $g \in G$ . Då gäller det att  $(g^{-1})^{-1} = g$ .*

*Bevis.* (i) Vi behöver visa att produkten  $g_2^{-1} * g_1^{-1}$  har den egenskap som krävs för att vara inversen till  $g_1 * g_2$ , alltså att  $(g_1 * g_2) * (g_2^{-1} * g_1^{-1}) = e$  och  $(g_2^{-1} * g_1^{-1}) * (g_1 * g_2) = e$ .

Med associativiteten i  $G$  gäller

$$\begin{aligned} (g_2^{-1} * g_1^{-1}) * (g_1 * g_2) &= g_2^{-1} * (g_1^{-1} * g_1) * g_2 = \\ &= g_2^{-1} * e * g_2 = g_2^{-1} * g_2 = e, \end{aligned}$$

där vi använde att  $g_1^{-1} * g_1 = e$ , att  $e$  är det neutrala elementet och att  $g_2^{-1} * g_2 = e$ .



På samma sätt har vi att

$$\begin{aligned}(g_1 * g_2) * (g_2^{-1} * g_1^{-1}) &= g_1 * (g_2^{-1} * g_2) * g_1^{-1} = \\ &= g_1 * e * g_1^{-1} = g_1 * g_1^{-1} = e.\end{aligned}$$

- (ii) För det neutrala elementet  $e$  gäller  $e * e = e$ . Därmed har  $e$  egenskapen som krävs för att vara  $e$ 's invers.
- (iii) Eftersom  $g^{-1}$  är invers till  $g$  gäller  $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$ . De här ekvationerna visar också att  $g$  har egenskapen som inversen till  $g^{-1}$  har och därmed gäller  $(g^{-1})^{-1} = g$ .

□

**Följdsats 4.3.4.** För varje element  $g$  i en grupp  $(G, *)$  gäller  $(g^2)^{-1} = (g^{-1})^2$ .

*Bevis.* Detta följer direkt från Sats 4.3.3(i) med  $g_1 = g_2 = g$ .

□

**Notation 4.3.5.** Upprepad användning av Sats 4.3.3(i) ger att

$$(g^n)^{-1} = (g^{-1})^n$$

för alla  $n \in \mathbb{N}$ . Detta element betecknar vi  $g^{-n}$ . Vi har alltså

$$g^n = \begin{cases} \underbrace{g * \dots * g}_{n \text{ gånger}} & \text{om } n \geq 1, \\ e & \text{om } n = 0, \\ \underbrace{g^{-1} * \dots * g^{-1}}_{-n \text{ gånger}} & \text{om } n \leq -1. \end{cases}$$

## Övningar

**Övning 4.1** (★). Vilka av följande mängder med operationer utgör grupper? Förklara ditt svar!

- (i) De naturliga talen under addition,  $(\mathbb{N}, +)$ ,
- (ii) De rationella talen under multiplikation,  $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ,
- (iii) Mängden av de reella talen förutom 0 under multiplikation,  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ .

**Övning 4.2** (★★). Låt  $(G, *)$  vara en grupp och låt  $a, b, c$  och  $d$  vara element i  $G$ . Visa att

$$(a * (b * c)) * d = ((a * b) * c) * d = (a * b) * (c * d) = a * (b * (c * d)) = a * ((b * c) * d).$$

Övningen visar att produkten av fyra element är samma oavsett hur vi sätter parenteserna. Man kan även visa att detta gäller för produkter med godtyckligt många faktorer.

**Övning 4.3** (\*). Låt  $(G, *)$  vara en grupp och tag ett element  $g \in G$ . Visa att  $g^m * g^n = g^{m+n}$  för alla  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

**Övning 4.4** (\*\*). Fyll i multiplikationstabellen för den liksidiga triangeln från Exempel 4.2.2.

**Övning 4.5** (\*). Låt  $G$  vara en grupp med 5 element  $e, g, g^2, g^3$  och  $g^4$  där  $g^5 = e$ . Multiplikationen ges då av  $g^n * g^m = g^l$  där  $l$  är resten av  $n + m$  efter division med 5. Till exempel gäller  $g^3 * g^3 = g^1 = g$  eftersom  $3 + 3 = 6$  har rest 1 efter division med 5.

(i) Skriv ned multiplikationstabellen för denna grupp.

(ii) Vad är inversen till  $g$ ?

(iii) Vad är inversen till  $g^3$ ?

**Övning 4.6** (\* \* \*). Låt  $(G, *)$  vara en grupp med ändligt många element. Bevisa att varje gruppelament förekommer precis en gång i varje kolonn och rad i multiplikationstabellen.

**Övning 4.7** (\*\*). Låt  $G$  vara en grupp som består av fyra element  $e, a, b$  och  $c$ . Komplettera följande multiplikationstabell för gruppen.

$*$	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$\cdot$	$\cdot$
$b$	$b$	$\cdot$	$e$	$\cdot$
$c$	$c$	$\cdot$	$\cdot$	$e$

**Övning 4.8** (\* \* \*). Låt  $G$  vara en grupp med ett jämnt antal element. Visa att det finns ett element  $g$  med  $g \neq e$  som har egenskapen att  $g * g = e$ .

(Ledning: Titta på mängden av alla element som inte är invers till sig själv. Har denna mängd ett udda eller ett jämnt antal element?)

**Övning 4.9** (\* \* \*). Låt  $(G, *)$  vara en grupp, och låt  $g, h \in G$ . Visa att det finns ett unikt element  $x$  så att  $x * g = h$ .

## 5 Delgrupper och generatorer

Vi har nu sett flera exempel på en grupp, det vill säga en mängd med en multiplikation som uppfyller vissa krav, *gruppaxiomen*. Det är dessutom så att vissa delmängder av en grupp också uppfyller dessa krav och en sådan delmängd kallar man för en *delgrupp*. Dessa delgrupper spelar en viktig roll inom gruppteorin. Till exempel är symmetrigruppen av ett mönster en delgrupp av isometrigruppen som består av alla isometrier i planet.

För att enklare kunna beskriva grupper och delgrupper kan man använda sig av *generatorer*. På samma sätt som atomerna är molekylernas byggstenar och som hus består av tegelsten finns det i många grupper och delgrupper speciella element som ”bygger upp” hela gruppen. Sådana element kallar vi generatorer och om man förstår relationerna mellan dessa så känner man till hela gruppens struktur.

Dessa två begrepp, delgrupper och generatorer, studerar vi här.

### 5.1 Delgrupper

Låt  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  vara en delmängd. Vi såg i Sats 4.2.1 att symmetrierna hos  $M$  utgör en delmängd  $\text{Sym}(M)$  till gruppen av alla isometrier i  $\mathbb{R}^2$ . En sådan delmängd av en grupp som själv är en grupp kallas för delgrupp. Detta begrepp kommer visa sig väldigt användbart så vi gör följande definition.

**Definition 5.1.1.** Låt  $(G, *)$  vara en grupp. En delmängd  $H \subseteq G$  är en *delgrupp* om följande gäller:

- (i)  $e \in H$ ,
- (ii)  $h_1 * h_2 \in H$  för alla  $h_1, h_2 \in H$ ,
- (iii)  $h^{-1} \in H$  för alla  $h \in H$ .

Med andra ord, en delgrupp av  $(G, *)$  är en delmängd som själv är en grupp med avseende på  $G$ :s multiplikation  $*$ . Egenskaperna (ii) och (iii) kan dessutom sammanfattas enligt följande sats.

**Sats 5.1.2.** Låt  $(G, *)$  vara en grupp. En delmängd  $H \subseteq G$  är en delgrupp om och endast om  $e \in H$  och  $h_1 * h_2^{-1} \in H$  för alla  $h_1, h_2 \in H$ .

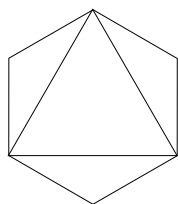
*Bevis.* Antag först att  $H$  är en delgrupp, och låt  $h_1, h_2 \in H$ . Enligt egenskap (iii) i definitionen gäller  $h_2^{-1} \in H$  och med (ii) följer  $h_1 * h_2^{-1} \in H$ . Mängden  $H$  uppfyller alltså egenskaperna i satsen.

Antag nu att  $H$  är en delmängd som i satsen. Vi visar att  $H$  är en delgrupp. Tag alltså  $h \in H$ . Vi sätter  $h_1 = e$  och  $h_2 = h$ . Då gäller att produkten  $h_1 * h_2^{-1} = e * h^{-1} = h^{-1}$  ligger i  $H$ . Detta visar att egenskap (iii) i definitionen av en delgrupp är uppfylld. Låt nu  $h_1, h_2 \in H$ . Vi har precis sett att  $h_2^{-1}$  ligger

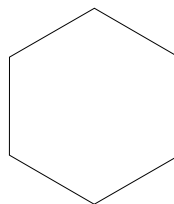
i  $H$ . Enligt antagandet gäller därmed  $h_1 * (h_2^{-1})^{-1} = h_1 * h_2 \in H$ , det vill säga vi har egenskap (ii).  $\square$

**Exempel 5.1.3.** För alla grupper  $G$  gäller att den minsta delgruppen är  $H = \{e\}$  som endast innehåller det neutrala elementet. Den största delgruppen är gruppen  $G$  själv.  $\blacktriangle$

**Exempel 5.1.4.** Jämför nu symmetrierna hos figurerna  $M_1$  och  $M_2$ , se också Övning 3.3.



Figur 5.1:  $M_1$



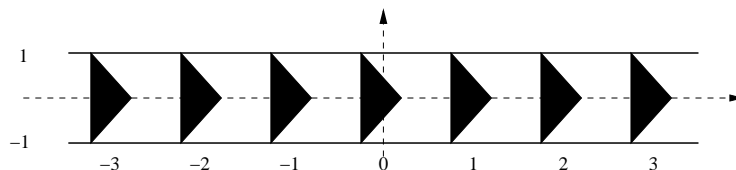
Figur 5.2:  $M_2$

Eftersom vi enbart lagt på extra krav på  $M_1$  i förhållande till  $M_2$  kommer alla symmetrier hos  $M_1$  även vara symmetrier hos  $M_2$ . Med andra ord, vi har att  $\text{Sym}(M_1) \subseteq \text{Sym}(M_2)$  som mängder. Dessutom vet vi att både  $\text{Sym}(M_1)$  och  $\text{Sym}(M_2)$  är grupper med avseende på samma multiplikation, nämligen sammansättningen av funktioner. Alltså ser vi att  $\text{Sym}(M_1)$  är en delgrupp av  $\text{Sym}(M_2)$ .

Då  $M_2$  är en liksidig sexhörning ser vi att en symmetri ges av rotation runt mittpunkten med  $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ , vilket inte är en symmetri på  $M_1$ . Speciellt är grupperna  $\text{Sym}(M_1)$  och  $\text{Sym}(M_2)$  olika.  $\blacktriangle$

**Anmärkning 5.1.5.** I Exempel 5.1.4 har vi två figurer  $M_2 \subseteq M_1$  så att  $\text{Sym}(M_1)$  är en delgrupp av  $\text{Sym}(M_2)$ . Observera att detta inte är sant i allmänhet, se Övning 5.4.

**Exempel 5.1.6.** Betrakta symmetrigruppen  $G = \text{Sym}(M)$  av frismönstret  $M$  som vi kan se i följande bild.



I  $G$  finns translationen  $t = t_{(1,0)}$  och speglingen  $s_x$  i  $x$ -axeln.

- Vad är den minsta delgruppen  $H_1$  av  $G$  som innehåller  $t$ ?

Enligt egenskap (iii) i definitionen för en delgrupp behöver  $t$ 's invers  $t^{-1}$  ligga i  $H_1$ . Med  $g_1 = t$  och  $g_2 = t$  följer från egenskap (ii) att även  $g_1 \circ g_2 = t \circ t = t^2$  är med i  $H_1$ . Upprepad multiplikation med

$t$  ger att alla potenser  $t^2 \circ t = t^3, t^4, \dots$  behöver finnas i  $H_1$ . Samma argumentation för inversen  $t^{-1}$  visar att  $t^n \in H_1$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ . Vi påstår nu att denna mängd  $\{t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  utgör en grupp. Den innehåller nämligen det neutrala elementet  $\text{id} = t^0$ , produkten  $t^{n_1+n_2}$  av alla två element  $t^{n_1}$  och  $t^{n_2}$  samt inversen  $t^{-n}$  till varje element  $t^n$ . Detta visar att  $H_1 = \{t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  är den minsta delgruppen av  $G$  som innehåller translationen  $t$ .

- Vad är den minsta delgruppen  $H_2$  som innehåller elementet  $s_x$ ?

Genom att upprepa samma argument som för elementet  $t$  ser vi att  $H_2 = \{s_x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Medan alla potenser  $t^n$  är olika gäller här relationen  $s_x^2 = \text{id}$ . Speciellt följer att  $s_x^n \in \{\text{id}, s_x\}$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ . Delgruppen  $H_2 = \{\text{id}, s_x\}$  består alltså av endast två element. ▲

## 5.2 Generatorer

Ibland kan samtliga element i en (del)grupp uttryckas med hjälp av bara några få element. I detta fall säger vi att gruppen är *genererad* av dessa element, som sedan kallas för *generatorer*. Vi kan förstå hela gruppen genom att förstå generatorerna och relationerna mellan dem.

**Exempel 5.2.1.** Låt oss titta en gång till på symmetrierna hos en liksidig triangel som vi i Exempel 4.2.2 såg bestod av elementen  $\{\text{id}, s_1, s_2, s_3, r_1, r_2\}$ . Genom att använda relationerna  $\text{id} = s_1 \circ s_1, r_1 = s_1 \circ s_2$  och  $r_2 = s_1 \circ s_3$  kan vi skriva symmetrierna som  $\{s_1 \circ s_1, s_1, s_2, s_3, s_1 \circ s_2, s_1 \circ s_3\}$ . Med andra ord, alla symmetrier ges som sammansättningar av speglingarna  $s_1, s_2$  och  $s_3$ . ▲

**Sats 5.2.2.** Låt  $(G, *)$  vara en grupp, och låt  $g_1, \dots, g_k \in G$ . Mängden  $H$  av alla element i  $G$  som kan skrivas som en produkt (med möjligtvis flera faktorer) av elementen  $g_1, \dots, g_k$  och deras inverser  $g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1}$  är en delgrupp.

*Bevis.* Genom att till exempel skriva  $e = g_1 * g_1^{-1}$  ser vi att  $G$ 's neutrala element ligger i  $H$ .

Låt nu  $h_1, h_2 \in H$ , det vill säga båda är produkter av element i mängden  $S = \{g_1, \dots, g_k, g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1}\}$ . Då är även  $h_1 * h_2$  en produkt av dessa element och därmed ett element i  $H$ .

Låt slutligen  $h \in H$ . Vi kan då skriva  $h$  som en produkt  $h = h_1 * \dots * h_m$  med  $h_i \in S$  för alla  $i = 1, \dots, m$ . Vi beräknar inversen  $h^{-1} = h_m^{-1} * \dots * h_1^{-1}$  enligt Sats 4.3.3(i). Eftersom alla faktorer  $h_i^{-1}$  ligger i  $S$  gäller också att  $h^{-1} \in H$ . ◻

**Definition 5.2.3.** Låt  $(G, *)$  vara en grupp och tag  $g_1, \dots, g_k \in G$ . Delgruppen  $H$  från Sats 5.2.2 är *genererad av elementen*  $g_1, \dots, g_k$  i  $G$ . Elementen  $g_1, \dots, g_k$  kallas för delgruppens *generatorer*. Vi skriver  $H = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ .

Med andra ord, generatorerna är en ”byggsats” som en grupp kan byggas av.

**Anmärkning 5.2.4.** Ofta är vi intresserade av generatorer för hela gruppen  $G$ . Även om  $G$  har oändligt många element kan  $G$  vara genererad av ändligt många element (se Exempel 5.1.6). I detta fall är generatorerna särskilt praktiska eftersom vi inte ens kan skriva ner alla gruppelment.

**Exempel 5.2.5.** Båda delgrupperna  $H_1 = \langle t \rangle$  och  $H_2 = \langle s_x \rangle$  från Exempel 5.1.6 är genererade av ett enda element. De är dock väldigt olika. Observera att den ena gruppen är oändlig medans den andra består av endast två element. ▲

**Notation 5.2.6.** Det framgår inte av notationen  $H_1 = \langle t \rangle$  och  $H_2 = \langle s_x \rangle$  att delgrupperna är mycket olika. För att kunna påpeka sådana skillnader skriver vi ibland  $H_2 = \langle s_x \mid s_x^2 = \text{id} \rangle$  för att beskriva ” $H_2$  är gruppen genererad av elementet  $s_x$  som uppfyller relationen  $s_x^2 = \text{id}$ ”.

Det kan finnas olika generatorer som genererar samma delgrupp, vi ger exempel på detta i Sats 5.2.8. Först behöver vi dock ett kort men användbart resultat.

**Hjälpsats 5.2.7.** Låt  $(G, *)$  vara en grupp med delgrupp  $H \subseteq G$ . Antag att  $g, h$  är två element i  $H$ . Då innehåller  $H$  hela delgruppen  $\langle g, h \rangle$ .

*Bevis.* Det följer av delgruppsaxiomen att  $H$  måste innehålla  $g^{-1}$  och  $h^{-1}$  och alla produkter av elementen  $g, h, g^{-1}, h^{-1}$ . Alltså innehåller  $H$  samtliga element av  $\langle g, h \rangle$ . □

**Sats 5.2.8.** Låt  $(G, *)$  vara en grupp och  $g, h \in G$ . Då gäller att

$$\langle g, h \rangle = \langle g^{-1}, h \rangle = \langle g, g * h \rangle.$$

*Bevis.* Enligt definitionen består delgrupperna  $\langle g, h \rangle$  och  $\langle g^{-1}, h \rangle$  av alla element som kan skrivas som produkter av elementen  $g, h, g^{-1}, h^{-1}$  respektive  $g^{-1}, h, (g^{-1})^{-1}, h^{-1}$ . I och med att  $(g^{-1})^{-1} = g$  har vi samma ”byggsatser” så dessa delgrupper är lika.

Vidare ser vi att  $g$  och  $g * h$  ligger i  $\langle g, h \rangle$  så enligt Hjälpsats 5.2.7 medför detta direkt att  $\langle g, g * h \rangle \subseteq \langle g, h \rangle$ . På samma sätt behöver vi visa att  $g, h \in \langle g, g * h \rangle$  för att få den omvända inklusionen  $\langle g, h \rangle \subseteq \langle g, g * h \rangle$ . Med andra ord, vi behöver uttrycka  $g$  och  $h$  som produkter med faktorer  $g, g * h, g^{-1}$  samt  $(g * h)^{-1}$ . Till exempel har vi  $g = g$  och  $h = g^{-1} * (g * h)$ . De två inklusionerna ger tillsammans att  $\langle g, h \rangle = \langle g, g * h \rangle$ . □

### 5.3 Sju exempel

I detta avsnitt tittar vi på sju frismönster samt deras symmetrigrupper och generatorer till dessa. Vissa symmetrier förekommer ofta så vi introducerar dessa här samtidigt som vi ger dem förenklande beteckningar.

- Translationer åt vänster eller höger längs med  $x$ -axeln, det vill säga avbildningar  $t_{(a,0)}$  där  $a \in \mathbb{R}$ . Vi inför notationen att  $t_a = t_{(a,0)}$ . Speciellt har vi då att om  $n$  är ett heltal så gäller  $t_n = t_1^n = t_{(n,0)}$ .
- Speglingen  $s_x$  i  $x$ -axeln som vi såg i Exempel 2.3.9 och som ges av  $s_x(x, y) = (x, -y)$ . Vidare har vi att sammansättningen  $t_{1/2} \circ s_x$  kommer spela en viktig roll så vi skriver denna som  $g$  och kallar den för *glidspeglingen*.
- Speglingar i vertikala linjer. En vertikal linje  $L$  är en linje som är parallell med  $y$ -axeln och är på formen  $L = \{(x, y) \mid x = a\}$ , eller  $L = \{x = a\}$  i förkortad notation, där  $a \in \mathbb{R}$  är fixerad. Låt  $s_a$  betyda speglingen i linjen  $\{x = a\}$ . Till exempel ges speglingen i linjen  $\{x = 0\}$ , det vill säga i  $y$ -axeln, enligt Exempel 2.3.9 som  $s_0(x, y) = s_y(x, y) = (-x, y)$ .
- Rotationer  $r_{\mathbf{v}, 180^\circ}$  med  $180^\circ$  kring en punkt  $\mathbf{v} = (a, 0)$  som ligger på  $x$ -axeln. Vi inför notationen  $r_a = r_{\mathbf{v}, 180^\circ}$  för denna rotation och speciellt skriver vi  $r = r_0 = r_{\mathbf{0}, 180^\circ}$ . I Exempel 2.3.7 såg vi att  $r(x, y) = (-x, -y)$ .

Låt oss undersöka relationerna mellan dessa avbildningar.

**Sats 5.3.1.** *För avbildningarna  $t_a$ ,  $s_x$ ,  $s_a$  och  $r_a$  enligt ovan gäller följande relationer.*

- (i)  $s_x \circ t_a = t_a \circ s_x$ ,
- (ii)  $s_y \circ t_a = t_{-a} \circ s_y$ ,
- (iii)  $r \circ t_a = t_{-a} \circ r$ ,
- (iv)  $s_x \circ s_y = s_y \circ s_x = r$ ,
- (v)  $s_x^2 = \text{id}$ ,  $s_y^2 = \text{id}$  och  $r^2 = \text{id}$ ,
- (vi)  $r_a = t_{2a} \circ r$  och
- (vii)  $s_a = t_{2a} \circ s_y$ .

*Bevis.* (i) Vi räknar ut värdet av båda funktionerna i en punkt  $(x, y)$  i planet för att se att  $s_x \circ t_a$  och  $t_a \circ s_x$  verkar på samma sätt. Vi har  $(s_x \circ t_a)(x, y) = s_x(x + a, y) = (x + a, -y)$ . På samma sätt beräknar vi  $(t_a \circ s_x)(x, y) = t_a(x, -y) = (x + a, -y)$ . Därmed har vi visat att  $(s_x \circ t_a)(x, y) = (t_a \circ s_x)(x, y)$ , och eftersom detta gäller för alla punkter  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  är funktionerna lika.

- (ii) Insättning i  $s_y \circ t_a$  och  $t_{-a} \circ s_y$  ger  $(s_y \circ t_a)(x, y) = s_y(x + a, y) = (-x - a, y)$  och  $(t_{-a} \circ s_y)(x, y) = t_{-a}(-x, y) = (-x - a, y)$  för alla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Därmed gäller  $s_y \circ t_a = t_{-a} \circ s_y$ .

(iii) För alla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  beräknar vi  $(r \circ t_a)(x, y) = r(x+a, y) = (-x-a, -y)$  och  $(t_{-a} \circ r)(x, y) = t_{-a}(-x, -y) = (-x-a, -y)$ . Även i detta fall ger alltså båda funktioner samma funktionsvärde för alla punkter i planet, så  $r \circ t_a = t_{-a} \circ r$ .

(iv) I detta fall har vi att

$$\begin{aligned} (s_x \circ s_y)(x, y) &= s_x(-x, y) = (-x, -y) = r(x, y) = \\ &= (-x, -y) = s_y(x, -y) = (s_y \circ s_x)(x, y) \end{aligned}$$

för alla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  och därmed likhet av de tre avbildningarna  $s_x \circ s_y$ ,  $r$  och  $s_y \circ s_x$ .

(v) Dessa relationer är kända från Anmärkning 2.3.10.

(vi) Notera som i Anmärkning 2.3.12 att en rotation  $r_{\mathbf{v}, \theta}$  runt en punkt  $\mathbf{v}$  kan fås via att vi först translaterar med  $-\mathbf{v}$ , sedan rotaterar med  $\theta$  runt origo och slutligen translaterar tillbaka med  $\mathbf{v}$ . Det vill säga att  $r_{\mathbf{v}, \theta} = t_{\mathbf{v}} \circ r_{\mathbf{0}, \theta} \circ t_{-\mathbf{v}}$ . Med hjälp av (iii) får vi därmed att

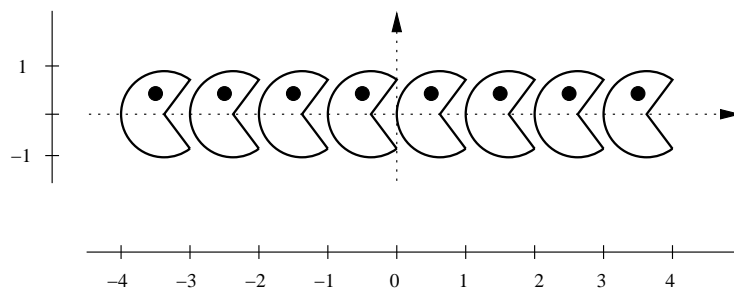
$$r_a = t_a \circ r \circ t_{-a} = t_a \circ t_{-(-a)} \circ r = t_{2a} \circ r.$$

(vii) På samma sätt som ovan får vi från Anmärkning 2.3.12 och (iv) ovan att  $s_a = t_a \circ s_y \circ t_{-a} = t_{2a} \circ s_y$ .

□

Nu är vi redo att diskutera våra frismönster.

**Exempel 5.3.2.** Vi börjar med att undersöka mönstret i Figur 5.3.

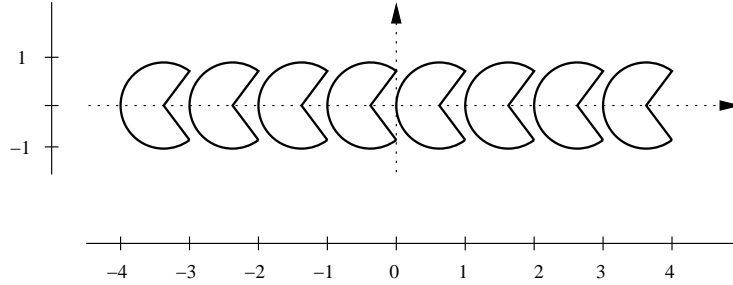


**Figur 5.3:** Ett mönster där translationer är de enda symmetrierna.

De enda symmetrierna är förskjutningarna med  $n$  längdenheter till vänster eller höger där  $n \in \mathbb{Z}$ . Låt  $t_1$  vara förskjutningen med en längdenhet till höger. Förskjutningen med  $n$  längdenheter till höger ges då av  $t_n = t_1^n$ . Förskjutningar till vänster ges som negativa potenser av  $t_1$ . Därmed är symmetrigruppen lika med  $G_1 = \{t_1^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle t_1 \rangle$ . ▲



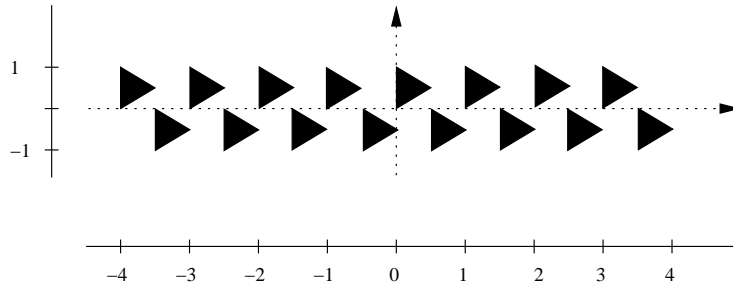
**Exempel 5.3.3.** Lite fler symmetrier kan vi hitta hos mönstret som visas i Figur 5.4.



**Figur 5.4:** Ett frismönster som är symmetriskt i  $x$ -axeln.

Även här finns alla translationer  $t_n = t_1^n$  där  $n \in \mathbb{Z}$ . Dessutom är mönstret spegelsymmetriskt i  $x$ -axeln så  $s_x$  är med i symmetrigruppen. Alla andra symmetrier ges som kombinationer av  $t_1$  och  $s_x$  som till exempel  $t_1^n \circ s_x$ . Observera att vi har relationerna  $s_x^2 = \text{id}$  och  $s_x \circ t_1 = t_1 \circ s_x$  enligt Sats 5.3.1. Gruppen är alltså  $G_2 = \langle t_1, s_x \mid s_x^2 = \text{id}, t_1 \circ s_x = s_x \circ t_1 \rangle$ . ▲

**Exempel 5.3.4.** Betrakta nu symmetrierna hos mönstret i Figur 5.5.



**Figur 5.5:** Ett frismönster med symmetrigrupp  $\langle g \rangle$ .

Som i de andra exemplen har vi alla translationer  $t_1^n$  med  $n \in \mathbb{Z}$ . Även om mönstret inte är symmetriskt i  $x$ -axeln ger speglingen  $s_x$  i  $x$ -axeln följt av en halv translation  $t_{1/2}$  en symmetri på mönstret som vi kallar för glidspeglings,  $g = t_{1/2} \circ s_x$ . Eftersom mängden av symmetrier är en grupp så har vi även sammansättningarna  $t_1^n \circ g$  och  $g \circ t_1^n$  som symmetrier av mönstret. Enligt Sats 5.3.1 har vi att

$$g \circ t_1^n = (t_{1/2} \circ s_x) \circ t_1^n = t_1^n \circ (t_{1/2} \circ s_x) = t_1^n \circ g.$$

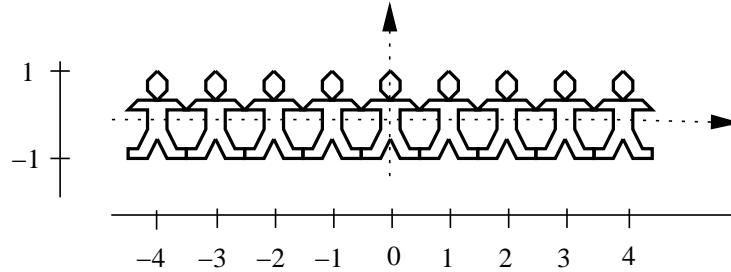
Observera också att

$$g^2 = (t_{1/2} \circ s_x) \circ (t_{1/2} \circ s_x) = t_{1/2} \circ t_{1/2} \circ s_x \circ s_x = t_1.$$

Med andra ord, translationen  $t_1$  är en potens av glidspeglingsen  $g$  så  $t_1 \in \langle g \rangle$ . Från detta följer att  $t_1^n = (g^2)^n = g^{2n} \in \langle g \rangle$  för samtliga heltal  $n$ . Detta visar att glidspeglingsen  $g$  genererar hela symmetrigruppen, det vill säga  $G_3 = \langle g \rangle$ .

▲

**Exempel 5.3.5.** Det nästa exemplet är symmetrigruppen till mönstret i Figur 5.6.

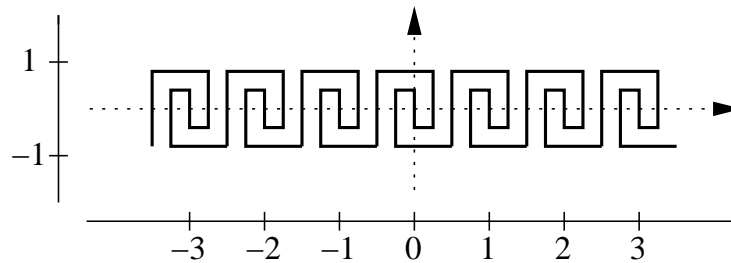


**Figur 5.6:** Ett frismönster med symmetrigrupp  $\langle t_1, s_y \rangle$ .

Förutom translationerna  $t_n = t_1^n$  är mönstret spegelsymmetriskt i samtliga linjer  $\{x = \frac{n}{2}\}$  där  $n \in \mathbb{Z}$ . Vi påstår att symmetrigruppen genereras av translationen  $t_1$  och speglingen  $s_y$  i  $y$ -axeln. Enligt Sats 5.3.1 gäller nämligen att sammansättningen  $t_1^n \circ s_y$  är lika med speglingen  $s_{n/2}$  i linjen  $\{x = \frac{n}{2}\}$  och därmed finns samtliga speglingar med i  $\langle t_1, s_y \rangle$ .

Dessutom gäller att  $s_y^2 = \text{id}$  och  $t_1 \circ s_y = s_y \circ t_1^{-1}$ , se Sats 5.3.1. Symmetrigruppen är alltså  $G_4 = \langle t_1, s_y \rangle = \langle t_1, s_y \mid s_y^2 = \text{id}, t_1 \circ s_y = s_y \circ t_1^{-1} \rangle$ . ▲

**Exempel 5.3.6.** Ännu ett frismönster har vi i Figur 5.7.

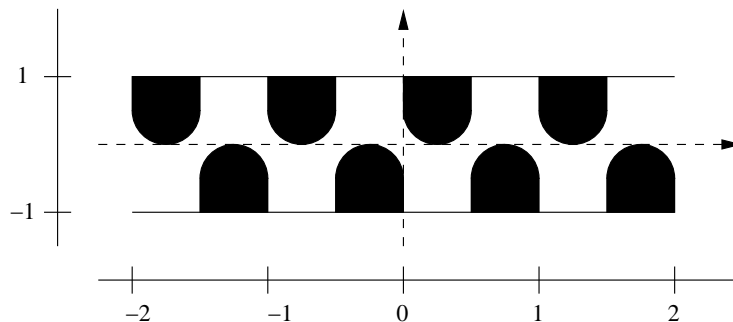


**Figur 5.7:** Ett frismönster med symmetrigrupp  $\langle t_1, r \rangle$ .

Även här finns alla translationer  $t_n = t_1^n$  där  $n \in \mathbb{Z}$ . Dessutom är mönstret rotationssymmetriskt med  $180^\circ$  i alla punkter  $(\frac{n}{2}, 0)$  med  $n \in \mathbb{Z}$ . Även i detta fall kan gruppen genereras av endast två element, till exempel av translationen  $t_1$  och rotationen  $r$  med  $180^\circ$  kring origo. Detta följer eftersom rotationen  $r_{n/2}$  kring punkten  $(\frac{n}{2}, 0)$  är lika med sammansättningen  $t_1^n \circ r$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$  enligt Sats 5.3.1. Symmetrigruppen är alltså  $G_5 = \langle t_1, r \rangle$ .

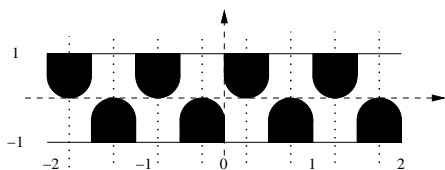
Observera att vi har relationerna  $r^2 = \text{id}$  och  $t_1 \circ r = r \circ t_1^{-1}$  enligt Sats 5.3.1. Att lägga till dem ger  $G_5 = \langle t_1, r \mid r^2 = \text{id}, t_1 \circ r = r \circ t_1^{-1} \rangle$ . ▲

**Exempel 5.3.7.** Nu undersöker vi symmetrierna hos mönstret i Figur 5.8.

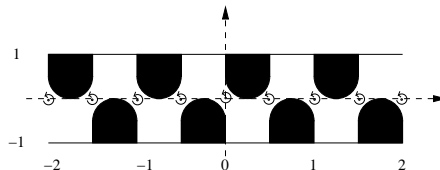


Figur 5.8: Ett frismönster med symmetrigrupp  $\langle g, r \rangle$ .

Förutom translationerna  $t_n = t_1^n$  där  $n \in \mathbb{Z}$  finns glidspeglingarna  $g$  och  $t_1^n \circ g$ , rotationer i punkterna  $(\frac{n}{2}, 0)$  där  $n \in \mathbb{Z}$  samt speglingar i linjerna  $\{x = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}\}$  där  $n \in \mathbb{Z}$ , se Figur 5.9 och 5.10.



Figur 5.9: Mönstrets spegelsymmetriaxlar.



Figur 5.10: Centrum för rotationssymmetrierna.

Vi kommer att visa att detta mönsters symmetrigrupp genereras av glidspeglingen  $g$  och rotationen  $r$  kring origo, det vill säga att symmetrigruppen är  $G_6 = \langle g, r \rangle$ .

Observera att rotationen  $r_{n/2}$  i punkten  $(\frac{n}{2}, 0)$  är lika med produkten  $t_1^n \circ r$  enligt Sats 5.3.1. Dessutom gäller att  $t_1^n = (g^2)^n = g^{2n}$  och därmed ligger  $r_{n/2} = g^{2n} \circ r$  i delgruppen som genereras av  $g$  och  $r$ . Slutligen har vi även  $t_1^n \circ g = (g^2)^n \circ g = g^{2n+1} \in \langle g, r \rangle$ .

På samma sätt vill vi uttrycka speglingen  $s_{\frac{1}{4} + \frac{n}{2}}$  i linjen  $\{x = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}\}$  med hjälp av  $g$  och  $r$ . Eftersom  $\frac{1}{4} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})$  följer det från Sats 5.3.1 att  $s_{\frac{1}{4} + \frac{n}{2}} = t_{n+\frac{1}{2}} \circ s_y$ . Genom att skriva om  $t_{n+\frac{1}{2}} = t_1^n \circ t_{1/2}$  och att infoga identiteten  $\text{id} = s_x \circ s_x$  följer

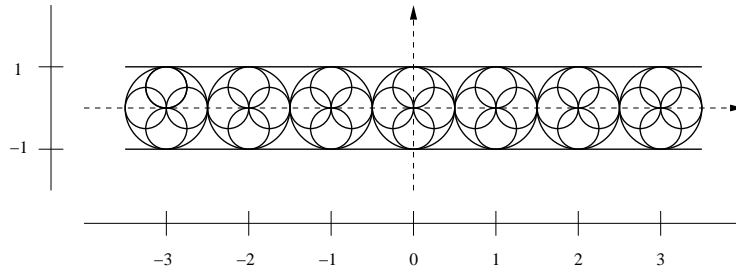
$$t_{n+\frac{1}{2}} \circ s_y = (t_1^n \circ t_{1/2}) \circ (s_x \circ s_x) \circ s_y = t_1^n \circ (t_{1/2} \circ s_x) \circ (s_x \circ s_y) = t_1^n \circ g \circ r,$$

där vi i tredje steget använde oss av att  $g = t_{1/2} \circ s_x$  och  $r = s_x \circ s_y$ . Slutligen följer från  $t_1^n = g^{2n}$  att speglingen  $s_{\frac{1}{4} + \frac{n}{2}} = g^{2n+1} \circ r$  finns med i  $\langle g, r \rangle$ .

Detta visar alltså att symmetrigruppen är  $G_6 = \langle g, r \rangle$ . Dessutom gäller relationerna  $r^2 = \text{id}$  och  $g \circ r = r \circ g^{-1}$ , alltså  $G_6 = \langle g, r \mid g \circ r = r \circ g^{-1}, r^2 = \text{id} \rangle$ .

▲

**Exempel 5.3.8.** Slutligen tittar vi på mönstret i Figur 5.11.



**Figur 5.11:** Ett frismönster med symmetrigrupp  $\langle t_1, s_x, s_y \rangle$ .

Här hittar vi följande symmetrier: alla translationerna  $t_n = t_1^n$  med  $n \in \mathbb{Z}$ , speglingen  $s_x$  i  $x$ -axeln och produkterna  $t_1^n \circ s_x$ , speglingarna  $s_{n/2}$  i linjen  $\{x = \frac{n}{2}\}$  samt rotationerna  $r_{n/2}$  i punkterna  $(\frac{n}{2}, 0)$ .

I och med att  $r = s_x \circ s_y$ ,  $s_{n/2} = t_1^n \circ s_y$ , och  $r_{n/2} = t_1^n \circ r = t_1^n \circ s_x \circ s_y$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$  enligt Sats 5.3.1 följer att symmetrigruppen genereras av elementen  $t_1, s_x$  och  $s_y$ . Den sista gruppen är alltså  $G_7 = \langle t_1, s_x, s_y \rangle$  med relationerna

$$s_x^2 = s_y^2 = \text{id}, \quad s_x \circ s_y = s_y \circ s_x,$$

$$t_1 \circ s_x = s_x \circ t_1 \quad \text{och} \quad t_1 \circ s_y = s_y \circ t_1^{-1}.$$

▲

### Extrauppgift

Gå ut på stan och hitta exempel på sju frismönster som har samma sju symmetri-grupper som de vi såg i Exempelen 5.3.2-5.3.8. Se till exempel Figurerna 2.7 och 2.8.

### Övningar

**Övning 5.1** (★). (i) Visa att  $H = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  är en delgrupp av  $(\mathbb{Z}, +)$ .

(ii) Visa att  $H = \{a \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  är en delgrupp av  $(\mathbb{Z}, +)$  för alla  $a \in \mathbb{Z}$ .

(Man kan faktiskt visa att samtliga delgrupper av  $(\mathbb{Z}, +)$  är av denna form!)

**Övning 5.2** (★★). Låt  $G$  vara en grupp med delgrupper  $H$  och  $K$ . Visa att snittet  $H \cap K$  är en delgrupp av  $G$ .

**Övning 5.3** (★★★). Låt  $H$  och  $K$  vara delgrupper av en grupp  $G$ . Är unionen  $H \cup K$  en delgrupp? Ge ett bevis eller ett motexempel.

**Övning 5.4** (\*\*\*). Låt  $M$  vara en figur med symmetrigrupp  $\text{Sym}(M)$ . Visa att om  $N \subseteq M$  så behöver det *inte* gälla att  $\text{Sym}(M)$  är en delgrupp till  $\text{Sym}(N)$ . (*Ledning:* Testa att rita någon "symmetrisk" figur och undersök dess symmetrier. Ta sedan bort ett streck eller någon annan del av figuren och se vilka symmetrier som är kvar.)

**Övning 5.5** (\*\*). Låt  $(G, *)$  vara en grupp som genereras av ett element  $g$  med  $g^5 = e$ . Med andra ord, gruppen  $G$  har 5 element  $e, g, g^2, g^3$  och  $g^4$  och följande multiplikationstabell.

$*$	$e$	$g$	$g^2$	$g^3$	$g^4$
$e$	$e$	$g$	$g^2$	$g^3$	$g^4$
$g$	$g$	$g^2$	$g^3$	$g^4$	$e$
$g^2$	$g^2$	$g^3$	$g^4$	$e$	$g$
$g^3$	$g^3$	$g^4$	$e$	$g$	$g^2$
$g^4$	$g^4$	$e$	$g$	$g^2$	$g^3$

Vilka element är generatorer för gruppen, det vill säga för vilka  $n = 1, \dots, 5$  gäller  $G = \langle g^n \rangle$ ?

**Övning 5.6** (\*\*\*). Låt  $(G, *)$  vara en grupp som genereras av ett element  $g$  med  $g^6 = e$ . Med andra ord, gruppen  $G$  har 6 element  $e, g, g^2, g^3, g^4$  och  $g^5$  och följande multiplikationstabell.

$*$	$e$	$g$	$g^2$	$g^3$	$g^4$	$g^5$
$e$	$e$	$g$	$g^2$	$g^3$	$g^4$	$g^5$
$g$	$g$	$g^2$	$g^3$	$g^4$	$g^5$	$e$
$g^2$	$g^2$	$g^3$	$g^4$	$g^5$	$e$	$g$
$g^3$	$g^3$	$g^4$	$g^5$	$e$	$g$	$g^2$
$g^4$	$g^4$	$g^5$	$e$	$g$	$g^2$	$g^3$
$g^5$	$g^5$	$e$	$g$	$g^2$	$g^3$	$g^4$

Vilka element är generatorer för gruppen, det vill säga för vilka  $n = 1, \dots, 6$  gäller  $G = \langle g^n \rangle$ ?

Kan du förklara skillnaden till Övning 5.5?

**Övning 5.7** (\*\*). Låt  $G$  vara en grupp som genereras av element  $g_1, \dots, g_n$ , det vill säga  $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ . Antag att  $g_n \in \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$ . Visa att det då gäller att  $G = \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$ .

**Övning 5.8** (\*\*). Som vi såg i Anmärkning 4.1.3 är en grupp  $(G, *)$  *abelsk* om det för alla element  $a, b \in G$  gäller att  $a * b = b * a$ . Visa att en grupp som är genererad av ett enda element alltid är abelsk.

## 6 Frisgrupper

Efter att ha gått genom all nödvändig teori är vi nu redo att systematiskt analysera vilka grupper som kan förekomma som symmetrigrupper till frismönster. Med hjälp av dessa grupper, de så kallade *frisgrupperna*, får vi sedan en klassificering av mönstren, det vill säga en indelning av dem utifrån deras symmetrier.

I detta kapitel går vi bland annat igenom hur vi ska handskas med problemet att ett frismönster kan ha flera olika frisgrupper beroende på hur vi placerar vårt koordinatsystem. Detta gör vi för att senare kunna visa att ett frismönster måste ha någon av precis sju olika *symmetristrukturer*. Med detta menar vi att det, efter ett speciellt val av koordinatsystem, har precis en av de sju frisgrupper som vi redan sett i Exempen 5.3.2–5.3.8.

### 6.1 Definition av frisgrupper

I Definition 2.2.2 gav vi en matematisk definition av ett frismönster som en delmängd av  $\mathbb{R}^2$  i formen av en oändligt lång remsa som upprepar sig med ett avstånd  $d > 0$ . Deras symmetrigrupper är de grupper som vi är mest intresserade av.

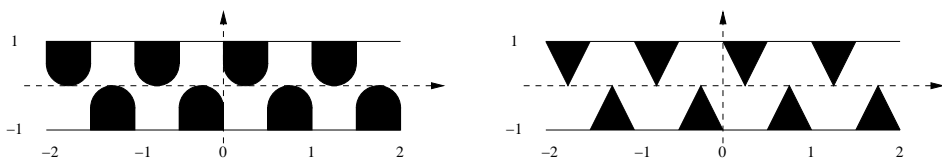
**Definition 6.1.1.** En symmetrigrupp  $G = \text{Sym}(M)$  till ett frismönster  $M$  kallas för *frisgrupp*.

Vi har redan sett flera olika exempel på frisgrupper i Exempen 5.3.2–5.3.8. Det visar sig att dessa sju grupper är i princip de enda som finns. Vi har nämligen följande.

**Påstående 6.1.2.** *Varje frismönster har, efter lämpligt val av koordinatsystem, precis en av de sju symmetristrukturerna som ges av frisgrupperna  $G_1, \dots, G_7$  från Exempen 5.3.2–5.3.8.*

Detta påståande kommer vi inte bevisa förrän i Sats 7.2.9. Innan vi kan visa detta behöver vi få en bättre förståelse för sambandet mellan frismönstren och deras symmetrigrupper. För det första noterar vi att två olika frismönster kan ha samma frisgrupp.

**Exempel 6.1.3.** Till exempel kan vi titta på de följande två mönstren. Vi



såg i Exempel 5.3.7 att det vänstra mönstret har symmetrigrupp  $G_6 = \langle g, r \rangle$  och vi kan se att det högra mönstret har precis samma symmetrier. ▲

Vi är dock inte intresserade av själva utseendet av mönstren utan endast av deras symmetristrukturer, och det är just frisgrupperna som beskriver dessa strukturer.

Dessutom kan ett frismönster ha flera olika frisgrupper. Detta beror på att vi kan välja koordinatsystemet på flera sätt. I nästa avsnitt undersöker vi hur vi kan handskas med detta problem.

För att enklare kunna diskutera symmetrierna hos frismönster bestämmer vi oss för följande konventioner.

- Varje frismönster ligger på remsan som beskrivs av mängden  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$ .
- Mönstret upprepar sig med minsta avstånd 1, det vill säga att  $t_1 = t_{(1,0)}$  är den "minsta" translationen bland mönstrets symmetrier.

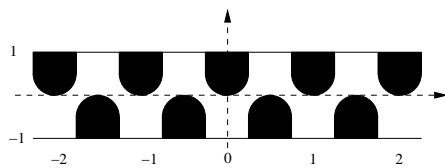
Detta val av koordinatsystem är inte helt entydigt som vi ser i nästa avsnitt.

## 6.2 Olika symmetrigrupper för samma mönster?

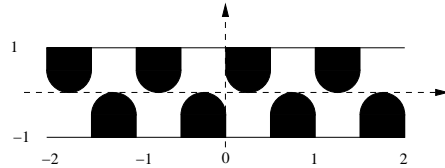
Betrakta följande frismönster.



Enligt vår konvention som vi införde ovan lägger vi koordinatsystemet så att mönstret ligger på remsan  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$  men det finns fortfarande oändligt många olika sätt att välja koordinatsystemet på. Vi kan ta vilken punkt som helst på  $x$ -axeln som vårt origo. Titta till exempel på följande bilder som visar samma mönster två gånger om men med olika positioner av origo.



Figur 6.1:  $M_1$



Figur 6.2:  $M_2$

I båda fallen är glidspeglingen  $g = t_{1/2} \circ s_x$  en symmetri men i första fallet är mönstret  $M_1$  spegelsymmetriskt med avseende på  $y$ -axeln och har ingen rotationssymmetri kring origo. Mönstret  $M_2$  å andra sidan är inte spegelsymmetriskt mot någon av axlarna men är symmetriskt under rotation med

180° i origo. Man kan visa att symmetrigrupperna till de två mönstren är  $\text{Sym}(M_1) = \langle g, s_y \rangle$  och  $\text{Sym}(M_2) = \langle g, r \rangle$  och dessa är uppenbarligen olika eftersom  $r \notin \langle g, s_y \rangle$ .

Om vi ska klassificera mönstren med hjälp av deras symmetrigrupper skulle vi egentligen vilja kräva att varje mönster motsvarar precis en grupp, oberoende av valet av origo. I det följande kommer vi att se hur vi kan ta oss runt detta problem.

Till att börja med ser vi att mönstren  $M_1$  och  $M_2$  skiljer sig åt endast med en förskjutning längs  $x$ -axeln, det vill säga med translationen  $\varphi = t_{1/4} = t_{(\frac{1}{4}, 0)}$ . Vi har alltså  $M_2 = \varphi(M_1)$ . Därmed ser vi att jämföra symmetrierna hos  $M_1$  och  $M_2$  är samma sak som att jämföra symmetrierna hos  $M_1$  och  $\varphi(M_1)$ . Detta kan göras med hjälp av följande hjälpsats.

**Hjälpsats 6.2.1.** *Låt  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  vara en delmängd, och låt  $f \in \text{Sym}(M)$  vara en symmetri. För varje isometri  $\varphi$  gäller att  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  är en symmetri hos bildmängden  $\varphi(M)$ , det vill säga  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \text{Sym}(\varphi(M))$ .*

*Bevis.* Med Sats 3.1.5 och 3.1.12 ser vi att  $h = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  är en sammansättning av isometrier och därmed en isometri enligt Sats 3.1.4. Dessutom gäller med Övning 1.11 att

$$h(\varphi(M)) = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(M)) = \varphi(f(\varphi^{-1}(\varphi(M)))) = \varphi(f(M)) = \varphi(M).$$

Vi har alltså visat att  $h$  är en isometri som avbildar mängden  $\varphi(M)$  på sig själv och är därmed en symmetri hos  $\varphi(M)$ .  $\square$

Varje symmetri hos  $M$  ger alltså en symmetri hos bilden  $\varphi(M)$ . Vi får till och med samtliga symmetrier hos  $\varphi(M)$  på detta sätt.

**Sats 6.2.2.** *Låt  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  vara en delmängd, och låt  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara en isometri. Avbildningen  $\alpha: \text{Sym}(M) \rightarrow \text{Sym}(\varphi(M))$  som ges av sammansättningen  $\alpha(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  är inverterbar med invers  $\alpha^{-1}(h) = \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$  för alla  $h \in \text{Sym}(\varphi(M))$ .*

*Bevis.* Låt  $h \in \text{Sym}(\varphi(M))$  vara en symmetri på  $\varphi(M)$ . Observera att sammansättningen  $\varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$  är en symmetri på  $\varphi^{-1}(\varphi(M)) = M$  och därmed kan vi definiera en avbildning  $\beta: \text{Sym}(\varphi(M)) \rightarrow \text{Sym}(M)$  via  $\beta(h) = \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$ . Denna avbildning är inversen till  $\alpha$ . Vi har nämligen

$$\begin{aligned} \beta(\alpha(f)) &= \beta(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi = \\ &= (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) = \text{id} \circ f \circ \text{id} = f \end{aligned}$$

för alla  $f \in \text{Sym}(M)$ . På samma sätt kan vi visa att  $\alpha(\beta(h)) = h$  för alla  $h \in \text{Sym}(\varphi(M))$ .  $\square$



**Följsats 6.2.3.** Låt  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  vara en delmängd, och låt  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara en isometri. Då gäller

$$\text{Sym}(\varphi(M)) = \{\alpha(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \mid f \in \text{Sym}(M)\}.$$

Dessutom gäller att om  $\text{Sym}(M)$  är genererad av elementen  $f_1, \dots, f_k$  så är  $\text{Sym}(\varphi(M))$  genererad av bilderna  $\alpha(f_1), \alpha(f_2), \dots, \alpha(f_k)$ .

*Bevis.* Vi har redan sett att  $\alpha(f) \in \text{Sym}(\varphi(M))$  för alla  $f \in \text{Sym}(M)$ . Låt alltså  $h$  vara ett element i  $\text{Sym}(\varphi(M))$ . Med  $f = \alpha^{-1}(h) = \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$ , som ligger i  $\text{Sym}(M)$  enligt Sats 6.2.2, får vi

$$h = \alpha(\alpha^{-1}(h)) = \alpha(f),$$

som avslutar beviset för det första påståendet.

Om  $\text{Sym}(M)$  genereras av  $f_1, \dots, f_k$  kan vi skriva varje element  $f \in \text{Sym}(M)$  som  $f = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_m$  med  $h_i \in \{f_1, \dots, f_k, f_1^{-1}, \dots, f_k^{-1}\}$ . Vi behöver visa att  $h = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  kan skrivas som en produkt av element i mängden

$$\{\alpha(f_1), \dots, \alpha(f_k), (\alpha(f_1))^{-1}, \dots, (\alpha(f_k))^{-1}\}.$$

Genom att skjuta in identitetsavbildningen  $\text{id} = \varphi^{-1} \circ \varphi$  mellan varje faktor i produkten  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  ser vi att

$$\begin{aligned} h &= \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_m \circ \varphi^{-1} = \\ &= \varphi \circ h_1 \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ h_2 \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \dots \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ h_m \circ \varphi^{-1} = \\ &= (\varphi \circ h_1 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ h_2 \circ \varphi^{-1}) \circ \dots \circ (\varphi \circ h_m \circ \varphi^{-1}) = \\ &= \alpha(h_1) \circ \alpha(h_2) \circ \dots \circ \alpha(h_m). \end{aligned}$$

Alltså kan  $h$  skrivas som produkt av faktorer  $\alpha(f_i)$  och  $\alpha(f_i^{-1})$ . Men

$$\alpha(f_i^{-1}) = \varphi \circ f_i^{-1} \circ \varphi^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1} \circ f_i^{-1} \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ f_i \circ \varphi^{-1})^{-1} = (\alpha(f_i))^{-1},$$

och därmed genereras  $\text{Sym}(\varphi(M))$  av elementen  $\alpha(f_1), \alpha(f_2), \dots, \alpha(f_k)$ .  $\square$

Dessa resultat tillämpade på vårt exempel säger alltså att symmetrierna hos  $M_1$  och  $M_2$  endast skiljer sig åt genom sammansättning med funktionerna  $\varphi$  och  $\varphi^{-1}$  där  $\varphi = t_{1/4}$  är förskjutningen med  $\frac{1}{4}$  längdenhet till höger.

Detta motiverar följande allmänna definition.

**Definition 6.2.4.** Två delgrupper  $H$  och  $K$  av gruppen av isometrier i planet är *konjugerade via en translation* om det finns en translation  $t_a$  med  $a \in \mathbb{R}$  så att antingen  $H = \{t_a \circ k \circ t_a^{-1} \mid k \in K\}$  eller  $K = \{t_a \circ h \circ t_a^{-1} \mid h \in H\}$ .

**Anmärkning 6.2.5.** Två frismönster som skiljer sig endast genom valet av origo har symmetrigrupper som är konjugerade via translationen som förskjuter det ena mönstret på det andra.

För att kunna avgöra vilka av våra symmetrigrupper som är konjugerade via en translation behöver vi undersöka sammansättningarna  $t_a \circ f \circ t_a^{-1}$  lite närmare för alla symmetrier  $f$  som förekommer hos frismönster.

**Hjälpsats 6.2.6.** *Låt  $t_a$  vara en förskjutning längs  $x$ -axeln med  $a \in \mathbb{R}$ . Då gäller följande:*

- (i)  $t_a \circ t_b \circ t_a^{-1} = t_b$  för alla  $b \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $t_a \circ s_x \circ t_a^{-1} = s_x$ ,
- (iii)  $t_a \circ s_y \circ t_a^{-1} = t_{2a} \circ s_y$ ,
- (iv)  $t_a \circ r \circ t_a^{-1} = t_{2a} \circ r$ ,
- (v)  $t_a \circ g \circ t_a^{-1} = g$  för glidspeglingen  $g = t_{1/2} \circ s_x$ .

*Bevis.* Se Övning 6.4. □

Låt oss nu ytterligare en gång titta på mönstren  $M_1$  och  $M_2$  från Figur 6.1 och 6.2 och deras symmetrigrupper. Med  $\varphi = t_{1/4}$  gäller alltså att

$$\text{Sym}(M_2) = \text{Sym}(\varphi(M_1)) = \{\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \mid f \in \text{Sym}(M_1)\}.$$

Kom ihåg att  $\text{Sym}(M_1)$  är genererad av glidspeglingen  $g$  och speglingen  $s_y$ . Med Följdsats 6.2.3 följer alltså att  $\text{Sym}(\varphi(M_1))$  genereras av symmetrierna  $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$  och  $\varphi \circ s_y \circ \varphi^{-1}$ . Enligt beräkningarna i Hjälpsats 6.2.6 gäller  $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = g$  och  $\varphi \circ s_y \circ \varphi^{-1} = t_{2/4} \circ s_y = t_{1/2} \circ s_y$ . Genom att infoga  $\text{id} = s_x \circ s_x$  och att använda att  $t_{1/2} \circ s_x = g$  och  $s_x \circ s_y = r$  ser vi att

$$\varphi \circ s_y \circ \varphi^{-1} = t_{1/2} \circ s_y = t_{1/2} \circ (s_x \circ s_x) \circ s_y = (t_{1/2} \circ s_x) \circ (s_x \circ s_y) = g \circ r.$$

I och med att vi enligt Sats 5.2.8 har att  $\langle g, r \rangle = \langle g, g \circ r \rangle$  ser vi att detta ger precis de symmetrier hos  $M_2$  som vi upptäckt tidigare.

I Exempelen 5.3.2 till 5.3.8 såg vi olika mönster som hade sju olika symmetrigrupper  $G_1, \dots, G_7$ . Eftersom vi nu har sett hur ett mönster ”verkar” ge olika symmetrigrupper ställer sig nu frågan om våra grupper  $G_1, \dots, G_7$  verkligen tillhör olika sorter mönster. Svaret visar sig vara ”ja!” enligt följande sats.

**Sats 6.2.7.** *Inga av grupperna  $G_1, \dots, G_7$  är konjugerade via en translation.*

*Bevis.* Med Övning 6.3 behöver vi alltså visa att det *inte* finns någon translation  $\varphi = t_a$  så att  $G_i = \{\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \mid f \in G_j\}$  för  $i \neq j$ . Detta följer direkt av uträkningarna i Hjälpsats 6.2.6.

För varje translation  $\varphi$  gäller att  $\varphi \circ t_1 \circ \varphi^{-1} = t_1$  och  $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = g$ . Gruppen  $G_1$  som endast innehåller translationer kan alltså inte vara konjugerad till någon av de andra grupperna. Samma argument gäller för gruppen  $G_3 = \langle g \rangle$ .

Det gäller även att  $\varphi \circ s_x \circ \varphi^{-1} = s_x$  och därmed  $\{\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \mid f \in G_2\} = G_2$ . Alltså är  $G_2$  inte konjugerad med någon av de andra grupperna.

Dessutom behöver varje grupp som är konjugerad till gruppen  $G_7$  innehålla speglingen  $s_x$  i  $x$ -axeln. Den enda möjligheten skulle alltså vara  $G_2$  som vi redan uteslutit.

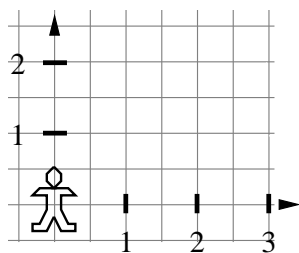
Varje grupp som är konjugerad till  $G_6$  innehåller glidspeglingen  $g$ . Den enda möjligheten skulle alltså vara gruppen  $G_3$  som vi redan uteslutit.

Det återstår att visa att  $G_4$  och  $G_5$  inte är konjugerade. Observera att sammansättningen  $\varphi \circ s_y \circ \varphi^{-1} = \varphi^2 \circ s_y$  är speglingen i en linje parallell med  $y$ -axeln. Eftersom mönstret i Exempel 5.3.6, som har  $G_5$  som symmetrigrupp inte är spegelsymmetrisk till någon vertikal linje kan  $G_4$  och  $G_5$  inte vara konjugerade.  $\square$

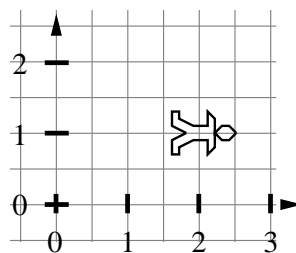
Satsen säger alltså att de sju frismönster som vi såg i Exempel 5.3.2–5.3.8 har olika frisgrupper oavsett var vi placerar vårt origo i våra mönster. I det avslutande kapitlet av detta kompendium kommer vi visa att vilken frisgrupp vi än hittar kommer, efter ett val av koordinatsystem, ha symmetrier som ges av precis en av grupperna  $G_1, \dots, G_7$ .

## Övningar

**Övning 6.1** ( $\star$ ). Hur är symmetrierna hos de två figurerna  $M_1$  och  $M_2$  relaterade?

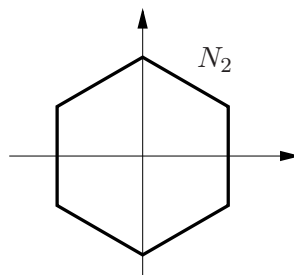
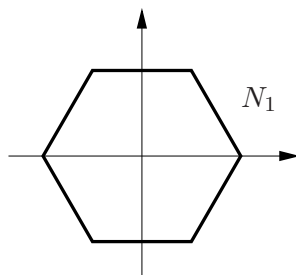


Figur 6.3:  $M_1$



Figur 6.4:  $M_2$

**Övning 6.2** ( $\star$ ). Hur är symmetrierna hos de två figurerna  $N_1$  och  $N_2$  relaterade?



**Övning 6.3** (\*\*\*). Låt  $H$  och  $K$  vara delgrupper av en grupp  $G$ . Visa att följande egenskaper är ekvivalenta.

(i) Det finns ett element  $s \in G$  så att  $H = \{s \circ k \circ s^{-1} \mid k \in K\}$ .

(ii) Det finns ett element  $t \in G$  så att  $K = \{t \circ h \circ t^{-1} \mid h \in H\}$ .

Vad är sambandet mellan  $s$  och  $t$ ?

Dra slutsatsen att två delgrupper  $H$  och  $K$  av gruppen av isometrier i planet är konjugerade via en translation om och endast om det finns en translation  $t_b$  med  $b \in \mathbb{R}$  så att  $K = \{t_b \circ h \circ t_b^{-1} \mid h \in H\}$ .

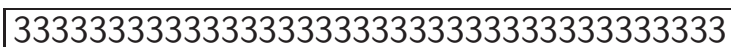
**Övning 6.4** (\*). Bevisa Hjälpsats 6.2.6.

**Övning 6.5** (\*\*). Låt  $b \in \mathbb{R}$ . Visa att gruppen som genereras av translationen  $t_1$  och speglingen i linjen  $\{x = b\}$  är konjugerad med gruppen genererad av  $t_1$  och  $s_y$ . Kan du förklara detta geometriskt?

**Övning 6.6** (\*\*). Visa att frisgruppen till ett frismönster  $M$  vars symmetrier ges av translationerna  $t_1^n$  med  $n \in \mathbb{Z}$ , speglingen i  $x$ -axeln och sammansättningar av dessa, är helt oberoende av var man placerar origo. Det vill säga, visa att man får exakt samma symmetrigrupp till  $M$  oavsett var man placerar origo.

**Övning 6.7** (\*\*). Undersök vilka av de sju frisgrupperna från Exempel 5.3.2–5.3.8 som är abelska (se Anmärkning 4.1.3).

**Övning 6.8** (\*\*). Ett frismönster som har samma frisgrupp som mönstret i Exempel 5.3.3 är



eftersom det är både translationsinvariant och spegelsymmetriskt i  $x$ -axeln (vi får här vara lite medgörliga i vad vi godkänner eftersom den övre bågen på 3:an inte är riktigt lika stor som den undre). Använd det svenska alfabetet, med både versaler och gemener, för att på samma sätt rita sju frismönster som har samma frisgrupper som mönstren från Exempel 5.3.2-5.3.8. Notera att man kan behöva anpassa bokstäverna lite grann för att få helt korrekta symmetrier (som i fallet med 3 ovan).

## 7 Klassifikation av frisgrupper

Vi är nu äntligen redo att visa att de sju frisgrupper som vi sett under kursens gång faktiskt är de enda sju som finns i den mening att varje frismönster har en symmetrigrupp som är konjugerad till någon av dessa. Detta kommer vi göra genom att först visa vilka speglingar och rotationer som kan förekomma och sedan dela upp i de fall som man får och helt enkelt beräkna alla dessa. Slutligen så går vi igenom en algoritm man kan använda för att undersöka vad ett givet frismönster har för symmetrigrupp.

### 7.1 Elementen i en frisgrupp

I Kapitel 6 definierade vi en frisgrupp som en symmetrigrupp till ett frismönster. Efter val av koordinatsystem antar vi alltid att detta mönster breder ut sig längs  $x$ -axeln och upprepar sig med avstånd av längd 1. På grund av detta kommer translationen  $t_1 = t_{(1,0)}$  alltid vara ett element i frisgruppen. Detta avsnitt kommer ha som mål att beskriva vilka andra element en frisgrupp kan ha.

Varje frisgrupp  $G$  består per definition av isometrier, vilka enligt Sats 3.1.11 kan skrivas på formen  $t \circ u$  med en translation  $t$  och där  $u$  är en rotation runt origo eller en spegling i en linje genom origo. Vi vill nu undersöka mer precist vilka  $t$  och  $u$  som kan förekomma.

**Definition 7.1.1.** Vi låter  $O$  beteckna mängden av alla rotationer runt origo och speglingar i linjer genom origo. För varje frisgrupp  $G$  sätter vi

$$G_o = \{u \in O \mid t \circ u \in G \text{ för någon translation } t\}.$$

**Anmärkning 7.1.2.** Anledningen till att vi använder bokstaven  $O$  är för att denna mängd benämns den *ortogonala gruppen*. Som namnet antyder kan man visa att denna mängd faktiskt är en grupp.

**Exempel 7.1.3.** Titta på frisgruppen  $G_3 = \langle g \rangle$  som vi såg i Exempel 5.3.4. Observera att speglingen  $s_x$  inte ligger i gruppen  $G_3$  men att glidspeglingen  $g$  gör det. Då  $g = t_{1/2} \circ s_x$  följer det att  $s_x \in (G_3)_o$ . Gruppen  $G_3$  består endast av potenser  $g^n$  av  $g$  där  $n \in \mathbb{Z}$ . Med

$$g^n = (t_{1/2} \circ s_x)^n = (t_{1/2})^n \circ s_x^n = t_{n/2} \circ s_x^n$$

och  $s_x^n = s_x$  för udda  $n$  och  $s_x^n = \text{id}$  för jämna  $n$  följer det att  $(G_3)_o = \{\text{id}, s_x\}$ . ▲

**Anmärkning 7.1.4.** Observera att Exempel 7.1.3 visar att  $G_o$  inte behöver vara en delmängd av  $G$ . Vi har nämligen att  $s_x \in (G_3)_o$  men  $s_x \notin G_3$ .

**Sats 7.1.5.** Låt  $f$  vara ett element i en frisgrupp  $G$ . Då är  $f = t_a \circ u$  för något  $a \in \mathbb{R}$  och  $u \in \{\text{id}, s_x, s_y, r\}$ . Speciellt är  $G_o$  en delmängd till  $\{\text{id}, s_x, s_y, r\}$ .

*Bevis.* Tag ett frismönster  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  med  $G = \text{Sym}(M)$ . Detta mönster är alltså en delmängd av  $\mathbb{R}^2$  som ligger mellan  $-1 \leq y \leq 1$  och upprepar sig med intervall av längd 1 i  $x$ -led. Låt  $f \in G$  vara en symmetri av  $M$  och skriv  $f = t \circ u$  med en translation  $t$  och en rotation eller spegling  $u$  enligt Sats 3.1.11. Observera att  $t(u(M)) = (t \circ u)(M)$ , se Övning 1.11.

Om  $u$  är en rotation med någon annan vinkel än  $180^\circ \cdot n$ , där  $n$  är ett heltal, så kommer bilden  $u(M)$  inte längre vara parallell med  $x$ -axeln och ingen translation kan motverka detta. Därmed skulle vi *inte* ha att  $(t \circ u)(M) = M$  så  $t \circ u$  skulle då ej vara en symmetri. Alltså är de enda rotationerna som *kan* förekomma  $\text{id} = r_{0,0^\circ}$  och  $r = r_{0,180^\circ}$ .

På samma sätt betraktar vi en spegling  $u$ . Om vi speglar i någon annan linje än  $x$ - eller  $y$ -axeln så kommer bilden  $u(M)$  att utbreda sig i en annan riktning än  $x$ -axeln. Detta kan inte motverkas av någon translation  $t$ , vilket motsäger att  $(t \circ u)(M) = M$ .

De enda möjligheterna för  $u$  är alltså  $\text{id}, r, s_x$  och  $s_y$ . Observera att det för alla dessa avbildningar gäller att  $u(M)$  ligger på remsan  $\{-1 \leq y \leq 1\}$ . Med  $(t \circ u)(M) = t(u(M))$  följer det att translationen  $t$  bevarar denna remsa. Vi ser därmed att  $t$  är en förskjutning längs  $x$ -axeln, det vill säga  $t = t_a$  för något  $a \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Hjälpssats 7.1.6.** *Mängden  $\{\text{id}, s_x, s_y, r\}$  är en grupp under sammansättning av funktioner.*

*Bevis.* Se Övning 7.1.  $\square$

**Sats 7.1.7.** *Låt  $G$  vara en frisgrupp. Då gäller att  $G_o$  med sammansättning av funktioner är en delgrupp av gruppen  $\{\text{id}, s_x, s_y, r\}$ .*

*Bevis.* Vi har redan sett i Sats 7.1.5 att  $G_o$  är en delmängd till  $\{\text{id}, s_x, s_y, r\}$ . Dessutom följer med  $t_1 \circ \text{id} = t_1 \in G$  att det neutrala elementet  $\text{id}$  är med i  $G_o$ .

Låt nu  $u, v \in G_o$ . Då vi vet att det finns  $a, b \in \mathbb{R}$  så att  $t_a \circ u$  och  $t_b \circ v$  ligger i  $G$ . Eftersom  $G$  är en grupp följer det att  $(t_a \circ u) \circ (t_b \circ v) \in G$ . Enligt beräkningarna i Sats 5.3.1 har vi att

$$(t_a \circ u) \circ (t_b \circ v) = t_a \circ (u \circ t_b) \circ v = t_a \circ t_{\pm b} \circ u \circ v = t_{a \pm b} \circ (u \circ v),$$

där tecknet framför  $b$  är positivt om  $u \in \{\text{id}, s_x\}$  och negativt om  $u \in \{s_y, r\}$ . Därmed gäller att  $t_{a \pm b} \circ (u \circ v) \in G$  vilket betyder att  $u \circ v \in G_o$ . Med andra ord, sammansättningen av två element i  $G_o$  ligger i  $G_o$ .

Slutligen måste vi visa att inversen för varje element  $u \in G_o$  också ligger i  $G_o$ . Eftersom alla element  $u$  i mängden  $\{\text{id}, s_x, s_y, r\}$  uppfyller att  $u^{-1} = u$  har vi att om  $u \in G_o$  så är  $u^{-1} = u \in G_o$ .  $\square$

För att förstå vilka möjligheter som finns för  $G_o$  behöver vi alltså bestämma delgrupperna av  $\{\text{id}, s_x, s_y, r\}$  vilket vi gör i nästa sats.

**Sats 7.1.8.** *Delgrupperna till  $\{\text{id}, s_x, s_y, r\}$  är  $\{\text{id}\}$ ,  $\{\text{id}, s_x\}$ ,  $\{\text{id}, s_y\}$ ,  $\{\text{id}, r\}$  och  $\{\text{id}, s_x, s_y, r\}$ .*

*Bevis.* Se Övning 7.2. □

## 7.2 De sju frisgrupperna

Vi har alltså endast fem möjligheter för gruppen  $G_o$ . Med hjälp av dessa kan vi avgöra vilka frisgrupper som finns. Konkret kommer vi att gå igenom samtliga delgrupper från Sats 7.1.8 och konstruera alla frisgrupper  $G$  som har just denna grupp som  $G_o$ .

**Hjälpssats 7.2.1.** *Låt  $G$  vara en frisgrupp. Mängden av translationerna i  $G$  är lika med  $\{t_1^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .*

*Bevis.* Varje frismönster upprepar sig med avstånd 1 och därmed gäller att  $t_1$  och alla dess potenser  $t_1^n = t_n$  med  $n \in \mathbb{Z}$  ligger i  $G$ .

Dessutom såg vi i Sats 7.1.5 att endast translationer längs med  $x$ -axeln finns med bland symmetrierna. Antag att  $t_a \in G$ . Varje reellt tal är summan av sin heltalsdel och sin decimaltalsdel så vi får att  $a = n + b$  där  $n \in \mathbb{Z}$  och  $0 \leq b < 1$ . Därmed kan vi skriva  $t_a = t_{n+b} = t_n \circ t_b$ . Observera att translationen  $(t_n)^{-1} = t_{-n}$  ligger i  $G$ . Därmed är också sammansättningen

$$t_{-n} \circ t_a = t_{-n} \circ t_{n+b} = t_{-n+n+b} = t_b$$

med i  $G$ . Eftersom ett frismönster inte upprepar sig med ett avstånd mindre än 1 följer att  $t_b \in G$  är endast möjligt för  $b = 0$ . Vi har alltså visat att  $t_a = t_n = t_1^n$ . □

**Hjälpssats 7.2.2.** *Låt  $G$  vara en frisgrupp och låt  $t_a \circ u$ , där  $a \in \mathbb{R}$  och  $u \in \{\text{id}, s_x, s_y, r\}$ , vara ett element i  $G$ . Om  $a = n + b$  där  $n \in \mathbb{Z}$  och  $0 \leq b < 1$  så gäller att  $t_b \circ u$  ligger i  $G$ .*

*Bevis.* Enligt Hjälpssats 7.2.1 finns translationen  $t_{-n}$  med i  $G$  och därmed också sammansättningen

$$t_{-n} \circ (t_a \circ u) = t_{-n} \circ (t_{n+b} \circ u) = t_{-n} \circ (t_n \circ t_b \circ u) = (t_{-n} \circ t_n) \circ (t_b \circ u) = t_b \circ u.$$

□

**Sats 7.2.3.** *Låt  $G$  vara en frisgrupp med  $G_o = \{\text{id}\}$ . Då är  $G = G_1 = \langle t_1 \rangle$ .*

*Bevis.* Enligt definitionen för  $G_o$  är de enda symmetrierna i  $G$  på formen  $t_a \circ \text{id} = t_a$  för något  $a \in \mathbb{R}$ . Enligt Hjälpssats 7.2.1 följer att  $a$  måste vara ett heltal och därmed att alla symmetrier som förekommer är potenser av  $t_1$ , det vill säga att  $G = \langle t_1 \rangle$ . Vi måste också visa att  $\langle t_1 \rangle$  faktiskt är en frisgrupp, men detta såg vi i Exempel 5.3.2 eftersom  $G_1 = \langle t_1 \rangle$  är symmetrigruppen till frismönstret i Figur 5.3. □

**Hjälpsats 7.2.4.** Låt  $G$  vara en frisgrupp sådan att  $G_o$  innehåller speglingen  $s_x$  i  $x$ -axeln. Då innehåller  $G$  precis ett av elementen  $s_x$  och  $g$ , där  $g = t_{1/2} \circ s_x$  är glidspeglingen. Vidare har vi följande två fall.

- (i) Om  $s_x \in G$  gäller att ett element  $t_a \circ s_x$  är ett element i  $G$  om och endast om  $a$  är ett heltal.
- (ii) Om  $g \in G$  gäller att elementet  $t_a \circ s_x$  är ett element i  $G$  om och endast om  $a = n + \frac{1}{2}$  där  $n$  är ett heltal (det vill säga att  $t_a \circ s_x = t_1^n \circ g$ ).

*Bevis.* Enligt definitionen för  $G_o$  måste det finnas något reellt tal  $a$  så att  $t_a \circ s_x$  ligger i  $G$ . Som i Hjälpsats 7.2.2 kan vi skriva  $a = n + b$  med ett heltal  $n$  och  $0 \leq b < 1$  och få att  $t_b \circ s_x$  ligger i  $G$ . Då har vi även  $(t_b \circ s_x)^2 \in G$ . Med Sats 6.2.6 ser vi att

$$(t_b \circ s_x)^2 = (t_b \circ s_x) \circ (t_b \circ s_x) = t_b \circ (s_x \circ t_b) \circ s_x = t_b \circ (t_b \circ s_x) \circ s_x = t_{2b}$$

är en translation i  $G$ . Alltså måste  $2b$  vara ett heltal enligt Hjälpsats 7.2.1. Eftersom vi nu antagit att  $0 \leq b < 1$  ger det bara två möjligheter, nämligen att  $b = 0$  eller  $b = \frac{1}{2}$ . I det första fallet följer att  $t_b \circ s_x = t_0 \circ s_x = s_x$  ligger i  $G$ . Om  $b = \frac{1}{2}$  så gäller att  $t_b \circ s_x = t_{1/2} \circ s_x$ , vilket är glidspeglingen  $g$ , ligger i  $G$ .

Vi måste nu visa att inte båda elementen  $s_x$  och  $g$  kan ligga i  $G$ . Antag alltså motsatsen, det vill säga att båda elementen ligger i  $G$ . Men då ligger även sammansättningen

$$g \circ s_x = t_{1/2} \circ s_x \circ s_x = t_{1/2}$$

i  $G$ , som inte är möjligt enligt Hjälpsats 7.2.1. Därmed har vi kommit fram till en motsägelse så vårt antagande att båda elementen ligger i  $G$  måste vara falskt. Vi har alltså visat att precis ett av elementen  $s_x$  och  $g$  ligger i  $G$ .

- (i) Om  $s_x \in G$  gör vi följande. Enligt Hjälpsats 7.2.1 vet vi att alla translationer  $t_1^n$  där  $n$  är ett heltal ligger i  $G$ . Därmed får vi från Sats 3.2.6 att sammansättningarna  $t_1^n \circ s_x$  ligger i  $G$ . På samma sätt som ovan har vi också att om  $t_a \circ s_x \in G$  så kan vi skriva  $a = n + b$  där  $n \in \mathbb{Z}$  och  $0 \leq b < 1$  och få från Hjälpsats 7.2.2 att  $t_b \circ s_x \in G$ . Men då har vi att sammansättningen  $(t_b \circ s_x) \circ s_x = t_b \circ (s_x \circ s_x) = t_b$  är ett element i  $G$ , vilket kräver att  $b = 0$  enligt Hjälpsats 7.2.1. Alltså är  $a = n$  ett heltal.
- (ii) Om  $g \in G$  får vi på samma sätt att  $t_1^n \circ g \in G$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ . Om  $t_a \circ s_x \in G$  kan vi som ovan skriva  $a = n + b$  där  $n$  är ett heltal och  $0 \leq b < 1$  och få att  $t_b \circ s_x \in G$ . Eftersom vi i detta fall har att  $g = t_{1/2} \circ s_x \in G$  får vi att sammansättningen  $(t_b \circ s_x) \circ (t_{1/2} \circ s_x) = t_{b+\frac{1}{2}}$  är ett element i  $G$ . Alltså måste  $b + \frac{1}{2}$  vara ett heltal och eftersom  $0 \leq b < 1$  kräver detta att  $b = \frac{1}{2}$ . Därmed har vi att  $a = n + \frac{1}{2}$  för något heltal  $n$ .



□

**Sats 7.2.5.** Låt  $G$  vara en frisgrupp med  $G_o = \{\text{id}, s_x\}$ . Då gäller det att  $G = G_2 = \langle t_1, s_x \rangle$  eller  $G = G_3 = \langle g \rangle$ .

*Bevis.* Låt  $G$  vara en frisgrupp med  $G_o = \{\text{id}, s_x\}$ . Enligt Hjälpsats 7.2.1 har vi att  $t_n = t_1^n \in G$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$  och att dessa är de enda translationerna. Dessutom har vi sett i Hjälpsats 7.2.4 att antingen  $t_n \circ s_x \in G$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$  eller  $t_n \circ g \in G$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ .

Detta ger också alla element eftersom definitionen för  $G_o$  kräver att alla  $h \in G$  är antingen på formen  $h = t_a$  eller  $h = t_a \circ s_x$  för något  $a \in \mathbb{R}$ .

I fallet att  $s_x$  ligger i  $G$  genereras gruppen alltså av  $t_1$  och  $s_x$ , eller med andra ord  $G = G_2 = \langle t_1, s_x \rangle$ , vilket vi i Exempel 5.3.3 såg var en frisgrupp. Om i stället glidspegligen  $g$  är med i  $G$  är alla element antingen på formen  $t_1^n$  eller  $t_1^n \circ g$ . Då  $t_1 = g^2$  har vi att  $G = G_3 = \langle g \rangle$  vilket vi såg var en frisgrupp i Exempel 5.3.4. □

**Hjälpsats 7.2.6.** Låt  $u$  vara speglingen  $s_y$  i  $y$ -axeln eller rotationen  $r$  med  $180^\circ$  kring origo. Låt  $G$  vara en frisgrupp med  $u \in G_o$ . Då finns ett  $b \in \mathbb{R}$  med  $0 \leq b < 1$  så att sammansättningen  $t_b \circ u$  ligger i  $G$ .

Dessutom gäller att ett element  $t_c \circ u$  ligger i  $G$  om och endast om  $c = m + b$  för något heltal  $m$ .

*Bevis.* Observera att det enligt Sats 5.3.1 i båda fall gäller att  $u^2 = \text{id}$  och  $u \circ t_a = t_{-a} \circ u$  för alla  $a \in \mathbb{R}$ .

Att  $u$  ligger i  $G_o$  betyder att det finns  $a \in \mathbb{R}$  så att  $t_a \circ u \in G$ . Vi skriver  $a = n + b$  med  $n \in \mathbb{Z}$  och  $0 \leq b < 1$  och med Hjälpsats 7.2.2 gäller att  $t_b \circ u \in G$ .

Eftersom vi för alla heltal  $m$  har att  $t_1^m \in G$ , som gäller enligt Hjälpsats 7.2.1, får vi även att alla sammansättningar  $t_1^m \circ (t_b \circ u) = t_{m+b} \circ u$  ligger i  $G$ . Alltså ligger  $t_c \circ u$  i  $G$  om  $c = m + b$  för något heltal  $m$ .

Det återstår att visa att  $t_c \circ u$  är ett element i  $G$  endast då  $c$  är på formen  $c = m + b$  med  $m \in \mathbb{Z}$ . Antag därför att  $t_c \circ u \in G$  för något  $c \in \mathbb{R}$ . Vi skriver  $c = m + d$  för något heltal  $m \in \mathbb{Z}$  och  $0 \leq d < 1$  och visar att  $d = b$ . Enligt Hjälpsats 7.2.2 gäller att även  $t_d \circ u \in G$ . Det finns alltså två element  $t_b \circ u$  och  $t_d \circ u$  med  $0 \leq b, d < 1$  i  $G$ . Därmed ligger även sammansättningen  $(t_b \circ u) \circ (t_d \circ u)$  i  $G$ . Enligt de ovan nämnda räknereglererna för  $u$  har vi att

$$(t_b \circ u) \circ (t_d \circ u) = t_b \circ (u \circ t_d) \circ u = t_b \circ (t_{-d} \circ u) \circ u = t_{b-d} \circ u^2 = t_{b-d}.$$

Alltså är translationen  $t_{b-d}$  ett element i  $G$ . Enligt Hjälpsats 7.2.1 måste därmed  $b - d$  vara ett heltal. Eftersom  $0 \leq b < 1$  och  $0 \leq d < 1$  är den enda möjligheten att  $b = d$ , så  $c = m + b$  för något heltal  $m$ . Vi har alltså visat att varje element i  $G$  på formen  $t_c \circ u$  kan skrivas som  $t_{m+b} \circ u = t_1^m \circ (t_b \circ u)$  för något  $m \in \mathbb{Z}$ . □

**Sats 7.2.7.** Låt  $G$  vara en frisgrupp.

- (i) Om  $G_o = \{\text{id}, s_y\}$  så är  $G$  och  $G_4 = \langle t_1, s_y \rangle$  konjugerade via en translation.
- (ii) Om  $G_o = \{\text{id}, r\}$  så är  $G$  och  $G_5 = \langle t_1, r \rangle$  konjugerade via en translation.

*Bevis.* Eftersom bevisen för de två fallen är identiska så låter vi  $u$  vara speglingen  $s_y$  eller rotationen  $r$  och gör beviset för båda samtidigt. Låt alltså  $G$  vara en frisgrupp med  $G_o = \{\text{id}, u\}$ . Som tidigare har vi med Hjälpsats 7.2.1 att translationerna i  $G$  är alla potenser  $t_1^n$  med  $n \in \mathbb{Z}$ . Dessutom finns det enligt Hjälpsats 7.2.6 ett reellt tal  $b$  med  $0 \leq b < 1$  så att  $t_b \circ u \in G$ .

Vi vill nu visa att  $G$  generas av  $t_1$  och  $t_b \circ u$ , det vill säga  $G = \langle t_1, t_b \circ u \rangle$ . Tag därför ett element  $h \in G$ . Enligt Sats 7.1.5 har vi att  $h = t_c \circ v$  där  $v \in \{\text{id}, u\}$  och  $c \in \mathbb{R}$ . Om  $v = \text{id}$  så får vi att  $h = t_c \circ \text{id} = t_c$  vilket enligt Hjälpsats 7.2.1 medför att  $c$  måste vara ett heltal. Den andra möjligheten är att  $v = u$ . Enligt Hjälpsats 7.2.6 gäller det att då  $h = t_1^n \circ t_b \circ u$  för något heltal  $n$ . Därmed är alla element i  $G$  antingen lika med en translation  $t_1^n = t_n$  eller på formen  $t_1^n \circ (t_b \circ u)$  för  $n \in \mathbb{Z}$ . Det betyder att  $G = \langle t_1, t_b \circ u \rangle$ .

Vi minns från Sats 5.3.1 att symmetrin  $t_b \circ s_y$  motsvarar speglingen i den vertikala linjen  $\{x = \frac{b}{2}\}$ . På samma sätt motsvarar symmetrin  $t_b \circ r$  rotationen med  $180^\circ$  kring punkten  $(\frac{b}{2}, 0)$ . Så låt oss nu betrakta translationen  $t_{-b/2}$  som förflyttar linjen  $\{x = \frac{b}{2}\}$  till  $y$ -axeln och punkten  $(\frac{b}{2}, 0)$  till origo. Låt  $M$  vara ett frismönster som har symmetrigrupp  $G$ . Observera att  $t_{-b/2}(M)$ , mönstret som fås genom att förskjuta  $M$  med  $\frac{b}{2}$  längdenheter till vänster, är ett frismönster med symmetrigrupp

$$\text{Sym}(t_{-b/2}(M)) = \langle t_{-b/2} \circ t_1 \circ t_{b/2}, t_{-b/2} \circ (t_b \circ u) \circ t_{b/2} \rangle$$

enligt Följdsats 6.2.3. Med räknereglerna från Hjälpsats 6.2.6 och Sats 5.3.1 ser vi att  $t_{-b/2} \circ t_1 \circ t_{b/2} = t_1$  och

$$\begin{aligned} t_{-b/2} \circ (t_b \circ u) \circ t_{b/2} &= t_{-b/2} \circ t_b \circ (u \circ t_{b/2}) = t_{-b/2} \circ t_b \circ (t_{-b/2} \circ u) = \\ &= (t_{-b/2} \circ t_b \circ t_{-b/2}) \circ u = t_{-\frac{b}{2} + b - \frac{b}{2}} \circ u = t_0 \circ u = u. \end{aligned}$$

Därmed följer alltså att  $G$  är konjugerad, via translationen  $t_{-b/2}$ , med gruppen  $\text{Sym}(t_{-b/2}(M)) = \langle t_1, u \rangle$ .

Slutligen noterar vi att vi med  $u = s_y$  får frisgruppen  $G_4 = \langle t_1, s_y \rangle$  från Exempel 5.3.5. Om  $u = r$  är  $G$  i stället konjugerad till frisgruppen  $G_5 = \langle t_1, r \rangle$  från Exempel 5.3.6.  $\square$

**Sats 7.2.8.** Låt  $G$  vara en frisgrupp med  $G_o = \{\text{id}, s_x, s_y, r\}$ . Då är  $G$  konjugerad med antingen  $G_6 = \langle g, r \rangle$  eller  $G_7 = \langle t_1, s_x, s_y \rangle$ .

*Bevis.* Låt  $G$  vara en frisgrupp med  $G_o = \{\text{id}, s_x, s_y, r\}$ . Enligt Hjälpsats 7.2.1 har vi att  $t_n = t_1^n \in G$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$  och att dessa är de enda translationerna.

Vidare gäller enligt Hjälpssats 7.2.6 att  $s_y \in G_o$  och  $r \in G_o$  medför att det finns reella tal  $0 \leq b, d < 1$  så att  $t_b \circ s_y$  och  $t_d \circ r$  ligger i  $G$ . Dessutom har vi sett i Hjälpssats 7.2.4 att  $s_x \in G_o$  betyder att  $G$  innehåller antingen  $s_x$  eller  $g$ . Vilken av dessa två symmetrier som är med i  $G$  beror på relationen mellan  $b$  och  $d$ . Vi har nämligen att sammansättningen

$$(t_b \circ s_y) \circ (t_d \circ r) = t_b \circ (s_y \circ t_d) \circ r = t_b \circ t_{-d} \circ s_y \circ r = t_{b-d} \circ s_x$$

och dess kvadrat

$$(t_{b-d} \circ s_x)^2 = t_{2(b-d)}$$

ligger i  $G$ . Med Hjälpssats 7.2.1 följer att  $2(b-d)$  behöver vara ett heltal. Eftersom  $0 \leq b < 1$  och  $0 \leq d < 1$  är detta endast möjligt för tre fall, nämligen  $b-d = -\frac{1}{2}$ ,  $b-d = 0$  eller  $b-d = \frac{1}{2}$ .

**Fall 1:**  $b-d = 0$ ; det vill säga att  $b = d$ . Det innebär att gruppen innehåller speglingen  $t_{b-b} \circ s_x = s_x$ . Eftersom alla element i  $G$  då är på formen  $t_1^n$ ,  $t_1^n \circ s_x$ ,  $t_1^n \circ (t_b \circ s_y)$  eller  $t_1^n \circ (t_b \circ r)$  enligt Hjälpssatserna 7.2.1, 7.2.4 och 7.2.6 följer det att  $G = \langle t_1, s_x, t_b \circ s_y, t_b \circ r \rangle$ . Det återstår att visa att denna grupp är konjugerad till  $G_7$ . Betrakta därför translationen  $t_{-b/2}$  med  $\frac{b}{2}$  längdenheter till vänster. Enligt Hjälpssats 6.2.6 ger sammansättningen med generatorerna att

$$\begin{aligned} t_{-b/2} \circ t_1 \circ t_{b/2} &= t_1, \\ t_{-b/2} \circ s_x \circ t_{b/2} &= s_x, \\ t_{-b/2} \circ (t_b \circ s_y) \circ t_{b/2} &= s_y \text{ och} \\ t_{-b/2} \circ (t_b \circ r) \circ t_{b/2} &= r. \end{aligned}$$

Alltså är  $G$  konjugerad med gruppen  $\langle t_1, s_x, s_y, r \rangle$ , se Följdsats 6.2.3. Med  $r = s_x \circ s_y$  ser vi att rotationen inte behövs bland generatorerna, se Övning 5.7. Därmed är alltså  $G$  konjugerad med  $\langle t_1, s_x, s_y, r \rangle = \langle t_1, s_x, s_y \rangle$  som är frisgruppen  $G_7$  från Exempel 5.3.8.

**Fall 2:**  $b-d = \frac{1}{2}$ ; det vill säga  $G$  innehåller symmetrin  $t_{b-d} \circ s_x = t_{1/2} \circ s_x = g$ . Som i det första fallet ser vi att  $G = \langle t_1, g, t_{d+\frac{1}{2}} \circ s_y, t_d \circ r \rangle$  som är konjugerad via translationen  $t_{-d/2}$  med gruppen  $\langle t_1, g, t_{1/2} \circ s_y, r \rangle$ . På grund av relationerna  $g^2 = t_1$  och  $g \circ r = t_{1/2} \circ s_x \circ r = t_{1/2} \circ s_y$  ser vi att  $t_1$  och  $t_{1/2} \circ s_y$  inte behövs bland generatorerna. Vi har alltså  $\langle t_1, g, t_{1/2} \circ s_y, r \rangle = \langle g, r \rangle = G_6$ . Detta är frisgruppen vi såg i Exempel 5.8.

**Fall 3:**  $b-d = -\frac{1}{2}$ ; det vill säga  $G$  innehåller symmetrin  $t_{b-d} \circ s_x = t_{-1/2} \circ s_x$ . Sammansättningen med  $t_1$  visar att glidspeglingen  $g = t_{1/2} \circ s_x = t_1 \circ (t_{-1/2} \circ s_x)$  är med i  $G$ . Som innan betyder det att  $G = \langle t_1, g, t_{d-\frac{1}{2}} \circ s_y, t_d \circ r \rangle$ . Denna grupp är konjugerad via translationen  $t_{-d/2}$  med gruppen

$$\langle t_1, g, t_{-1/2} \circ s_y, r \rangle = \langle g, r \rangle = G_6.$$

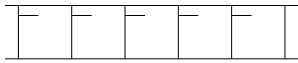
Vi får alltså samma grupp som i andra fallet.

Se Övning 7.3 för detaljerna i andra och tredje fallet.  $\square$

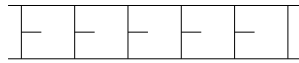
**Sats 7.2.9.** Varje frismönster har, efter lämpligt val av koordinatsystem, precis en av de sju symmetristrukturerna som ges av frisgrupperna  $G_1, \dots, G_7$  från Exempler 5.3.2–5.3.8.

*Bevis.* Låt  $M$  vara ett frismönster, och låt  $G$  vara dess symmetrigrupp. Med Sats 7.1.7 och Sats 7.1.8 vet vi att  $G$  är lika med någon av grupperna  $\{\text{id}\}$ ,  $\{\text{id}, s_x\}$ ,  $\{\text{id}, s_y\}$ ,  $\{\text{id}, r\}$  eller  $\{\text{id}, s_x, s_y, r\}$ . Därmed gäller enligt Satserna 7.2.3–7.2.8 att  $G$  är konjugerad med någon av frisgrupperna  $G_1, \dots, G_7$ . Enligt Sats 6.2.7 är  $G$  konjugerad med precis en av dem. Eftersom konjugering med en translation  $t_a$  enbart flyttar origo så kan vi välja koordinatsystemet så att  $G$  är lika med någon av grupperna  $G_1, \dots, G_7$ .  $\square$

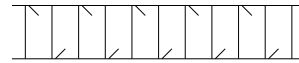
Nedan sammanfattar vi de sju symmetristrukturerna som ett frismönster kan ha genom att ge enkla exempel på frismönster för varje frisgrupp.



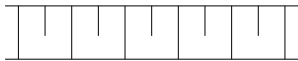
**Figur 7.1:**  $G_1$



**Figur 7.2:**  $G_2$



**Figur 7.3:**  $G_3$



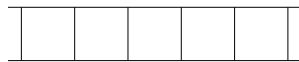
**Figur 7.4:**  $G_4$



**Figur 7.5:**  $G_5$



**Figur 7.6:**  $G_6$



**Figur 7.7:**  $G_7$

**Anmärkning 7.2.10.** Låt oss även ge några korta kommentarer om Alhambramönster och deras symmetrigrupper, de så kallade *Alhambragrupperna*. Vi ser redan i Exempel 2.2.5 att sådana mönster kan ha många fler symmetrier än frismönster. Att det finns translationer i två olika riktningar möjliggör bland annat speglingar i diagonala linjer och rotationer med  $60^\circ$  eller  $90^\circ$ . Trots detta finns det bara några få olika symmetristrukturerna. Med liknande metoder som för frismönstren kan man nämligen visa att det finns precis 17 olika Alhambragrupper. Beviset för detta kan man till exempel hitta i Armstrongs bok *Groups and Symmetry* (se *Förslag till vidare läsning* på sida 86).

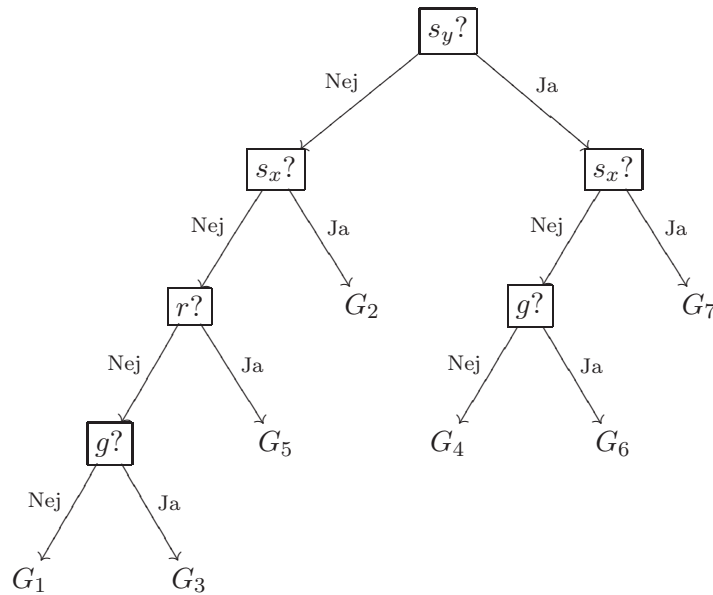
Dessa mönster och grupper är namngivna efter palatset Alhambra som ligger i Granada i Spanien. Väggarna och taken är rikligt dekorerade med mosaiker och i dessa ska det gå att hitta exempel på samtliga 17 symmetristrukturerna.

### 7.3 Algoritm för frisgrupper

Nu när vi lärt oss att det bara finns sju olika symmetristrukturerna hos frismönster så kan vi ge en enkel algoritm för att avgöra vilken symmetrigrupp

ett givet frismönster har. Det visar sig nämligen att det räcker att svara på som mest fyra frågor enligt nedan.

I första steget behöver vi avgöra om vi kan välja origo så att mönstret är spegelsymmetriskt i  $y$ -axeln. Efter det frågar vi oss om mönstret är spegelsymmetriskt i  $x$ -axeln. Har vi till exempel svarat "Nej" på båda dessa frågor undersöker vi om vi kan välja koordinatsystemet så att mönstret är rotations-symmetriskt i origo. Om svaret är "Ja" ges mönstrets symmetristruktur av gruppen  $G_5$ . För varje frismönster kan vi på samma sätt följa grafen nedan tills vi kommit fram till dess symmetrigrupp.



## Övningar

**Övning 7.1** (★). Bevisa Hjälpsats 7.1.6.

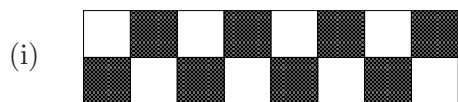
**Övning 7.2** (★). Bevisa Sats 7.1.8.

**Övning 7.3** (★★). Fyll i detaljerna för Fall 2 och Fall 3 i beviset av Sats 7.2.8.

**Övning 7.4** (★). Denna uppgift handlar om algoritmen i Avsnitt 7.3.

- (i) Varför behöver vi inte fråga oss om mönstret har rotations-symmetri om vi svarat "Ja" på de första två frågorna i algoritmen?
- (ii) Varför behöver vi inte fråga oss om mönstret har rotations-symmetri om vi svarar "Ja" på första frågan och "Nej" på den andra?

**Övning 7.5** (★). Använd algoritmen i Avsnitt 7.3 för att bestämma vilka symmetrier som följande frismönster har.



**Övning 7.6** (\*\*\*). Man säger att två grupper  $(G, *)$  och  $(H, \star)$  är *isomorfa* om det existerar en inverterbar avbildning  $\varphi: G \rightarrow H$  som uppfyller den strukturbevarande egenskapen att

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \star \varphi(g_2)$$

för alla  $g_1, g_2 \in G$ . Man kallar då  $\varphi$  för en *isomorfi*. Följande tre uppgifter är inte direkt relaterade till varandra (så varje deluppgift kan lösas även om man inte klarat de andra) men de är alla viktiga resultat inom gruppteori och även användbara i Övning 7.7. *Notera att denna övning ej har något specifikt med frisgrupper att göra och kan lösas enbart från teorin om abstrakta grupper från Kapitel 4.*

- (i) Låt  $e_G$  och  $e_H$  vara de neutrala elementen hos  $G$  och  $H$ . Visa att om  $\varphi: G \rightarrow H$  är en isomorfi så gäller det att  $\varphi(e_G) = e_H$ . (*Ledning:* Börja med att tillämpa  $\varphi$  på likheten  $e_G = e_G * e_G$ .)
- (ii) Visa att om  $\varphi: G \rightarrow H$  är en isomorfi så är även  $\varphi^{-1}: H \rightarrow G$  en isomorfi.
- (iii) Visa att om  $G$  är abelsk (se Övning 5.8) och  $H$  inte är det så kan  $G$  och  $H$  inte vara isomorfa. (*Ledning:* Tag två element  $h_1, h_2 \in H$  så att  $h_1 \star h_2 \neq h_2 \star h_1$  och jämför denna likhet mot densamma för  $g_1 = \varphi^{-1}(h_1)$  och  $g_2 = \varphi^{-1}(h_2)$ .)

**Övning 7.7** (\*\*\*). Med hjälp av Övning 7.6 kan vi nu jämföra några av våra frisgrupper.

- (i) Visa att gruppen  $G_2 = \langle t_1, s_x \rangle$  inte är isomorf med någon av grupperna  $G_4 = \langle t_1, s_y \rangle$ ,  $G_5 = \langle t_1, r \rangle$ ,  $G_6 = \langle g, r \rangle$  och  $G_7 = \langle t_1, s_x, s_y \rangle$ .
- (ii) Visa att grupperna  $G_1 = \langle t_1 \rangle$  och  $G_2 = \langle t_1, s_x \rangle$  inte är isomorfa. (*Ledning:* Om  $a \in G$  är ett element som uppfyller  $a^2 = e_G$ , där  $e_G$  är det neutrala elementet i  $G$ , och om  $\varphi: G \rightarrow H$  är en isomorfi, vad kan man då säga om  $(\varphi(a))^2$ ?)

## Lösningar till udda övningsuppgifter

### Övning 1.1.

(i)  $B \cup C = A$ .

(ii)  $B \cap C = \emptyset$ .

(iii)  $D \cap C = \{4, 36\}$ .

(iv)  $\{x \in D \mid x \in B\} = D \cap B = \{1, 19, 101\}$ .

(v)  $\{x \in A \mid x = y + 1 \text{ för något } y \in D\} = \{2, 5, 20, 37, 102\}$ .

(vi)  $\{x + 1 \mid x \in D\} = \{2, 5, 20, 37, 102\}$ .

**Övning 1.3.** Tag  $x \in \mathbb{N}$ , det vill säga att  $x$  är något av talen  $1, 2, 3, \dots$ . I synnerhet gäller  $x \in \{0, 1, 2, \dots, x\} = B_x$  och därmed  $x \in B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$ . Eftersom  $x$  var godtycklig visar detta att  $\mathbb{N} \subseteq B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$ .

Omvänt, antag att  $x \in B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$ . Det betyder att det finns ett heltal  $n \geq 1$  så att  $x \in B_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . I synnerhet gäller  $x \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ . Detta visar att  $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \subseteq \mathbb{N}$ .

Eftersom båda inklusioner  $\mathbb{N} \subseteq B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$  och  $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \subseteq \mathbb{N}$  gäller kan vi dra slutsatsen att  $\mathbb{N} = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$ .

**Övning 1.5.** Ett exempel ges av funktionen  $f$  definierad genom  $f(1) = A$ ,  $f(2) = B$ ,  $f(3) = C$ ,  $f(4) = B$ . Vi kan välja  $f(k)$  fritt bland  $A, B$  och  $C$  för  $k = 1, 2, 3, 4$ . Alltså ska vi välja ett av tre alternativ fyra gånger, så vi får totalt  $3^4 = 81$  möjliga funktioner.

**Övning 1.7.** Alla utom "Mängden av de naturliga talen" är påståenden. Det enda påståendet för vilket vi kan avgöra om det är sant eller falskt är "Varje mängd innehåller minst ett element", och detta påstående är falskt eftersom den tomma mängden inte innehåller något element.

**Övning 1.9.** Vi använder oss upprepade gånger av Hjälpssats 1.4.1 och får

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) = \\ &= f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ (\text{id}_Y \circ f) = \\ &= f^{-1} \circ f = \text{id}_X.\end{aligned}$$

**Övning 1.11.** Enligt definitionen för bilden av en mängd har vi att

$$(f \circ g)(X) = \{y \in X \mid \text{det existerar ett element } z \in X \text{ så att } (f \circ g)(z) = y\}$$

och

$$f(g(X)) = \{y \in X \mid \text{det existerar ett element } z \in g(X) \text{ så att } f(z) = y\}.$$

Tag först  $x \in (f \circ g)(X)$ . Då gäller det att det finns något element  $z \in X$  så att  $(f \circ g)(z) = x$ . För element vet vi att  $(f \circ g)(z) = f(g(z))$  så  $x = f(g(z))$  och eftersom  $g(z) \in g(X)$  betyder det att  $x \in f(g(X))$ . Eftersom detta gäller för alla  $x \in (f \circ g)(X)$  har vi att  $(f \circ g)(X) \subseteq f(g(X))$ .

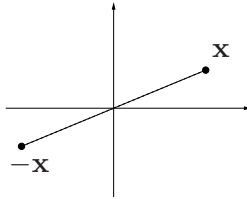
Tag nu  $x \in f(g(X))$ . Då finns det ett element  $z \in g(X)$  så att  $x = f(z)$ . Eftersom  $z \in g(X)$  betyder det att det finns något  $y \in X$  så att  $g(y) = z$ . Därmed har vi att  $x = f(z) = f(g(y)) = (f \circ g)(y)$ . Eftersom  $(f \circ g)(y)$  per definition är ett element i  $(f \circ g)(X)$  har vi att  $x \in (f \circ g)(X)$ . Då detta gäller för alla  $x \in f(g(X))$  har vi att  $f(g(X)) \subseteq (f \circ g)(X)$ .

De två inklusionerna  $(f \circ g)(X) \subseteq f(g(X))$  och  $f(g(X)) \subseteq (f \circ g)(X)$  ger tillsammans att  $(f \circ g)(X) = f(g(X))$ .

**Övning 2.1.** Normen av  $-\mathbf{x}$  ges av

$$\|-\mathbf{x}\| = \|(-x, -y)\| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\mathbf{x}\|.$$

Det vill säga att normen av  $-\mathbf{x}$  är lika med normen av  $\mathbf{x}$ . Geometriskt kan detta förklaras med följande figur



där vi ser att avståndet från  $\mathbf{x}$  till origo är precis lika långt som avståndet från  $-\mathbf{x}$  till origo. Det enda som skiljer är att  $-\mathbf{x}$  pekar åt motsatt håll från  $\mathbf{x}$  relativt origo.

**Övning 2.3.** Avståndet ges av

$$\|\mathbf{x} - t_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x} - (\mathbf{x} + \mathbf{v})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x} - \mathbf{v}\| = \|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|,$$

det vill säga att avståndet ges av normen av elementet  $\mathbf{v}$ .

**Övning 2.5.** Betrakta mängden  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$  där  $a = b = 0$ . Ekvationen ges då alltså enbart av  $c = 0$  vilket ger oss två fall. Om konstanten  $c \neq 0$  finns det inga  $x$  och  $y$  som uppfyller ekvationen  $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$ , därmed är mängden lika med den tomma mängden  $\emptyset$ . Om däremot  $c = 0$  så uppfyller alla  $x$  och  $y$  ekvationen  $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$ , alltså  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 = 0\} = \mathbb{R}^2$ . Eftersom varken  $\emptyset$  och  $\mathbb{R}^2$  är vad vi vill ska betraktas som linjer utesluter vi fallet då  $a = b = 0$ .

**Övning 2.7.** Låt  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , och låt  $s_{L_2}(\mathbf{x}) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ , det vill säga att vi har  $\tilde{x} = x \cos(2\varphi) + y \sin(2\varphi)$  och  $\tilde{y} = x \sin(2\varphi) - y \cos(2\varphi)$ . Då gäller att

$$s_{L_1}(s_{L_2}(\mathbf{x})) = s_{L_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x} \cos(2\theta) + \tilde{y} \sin(2\theta), \tilde{x} \sin(2\theta) - \tilde{y} \cos(2\theta)).$$



Vi förenklar den första koordinaten under användning av  $\cos(2\varphi) = \cos(-2\varphi)$  och  $\sin(2\varphi) = -\sin(-2\varphi)$  enligt

$$\begin{aligned}\tilde{x} \cos(2\theta) + \tilde{y} \sin(2\theta) &= \\ &= (x \cos(2\varphi) + y \sin(2\varphi)) \cos(2\theta) + (x \sin(2\varphi) - y \cos(2\varphi)) \sin(2\theta) = \\ &= x(\cos(2\varphi) \cos(2\theta) + \sin(2\varphi) \sin(2\theta)) - \\ &\quad - y(-\cos(2\theta) \sin(2\varphi) + \cos(2\varphi) \sin(2\theta)) = \\ &= x(\cos(-2\varphi) \cos(2\theta) - \sin(-2\varphi) \sin(2\theta)) - \\ &\quad - y(\cos(2\theta) \sin(-2\varphi) + \cos(-2\varphi) \sin(2\theta)) = \\ &= x \cos(2\theta + (-2\varphi)) - y \sin(2\theta + (-2\varphi)) = \\ &= x \cos(2\theta - 2\varphi) - y \sin(2\theta - 2\varphi),\end{aligned}$$

som är första koordinaten i  $r_{\mathbf{0}, 2\theta - 2\varphi}(\mathbf{x})$ .

För den andra koordinaten beräknar vi

$$\begin{aligned}\tilde{x} \sin(2\theta) - \tilde{y} \cos(2\theta) &= \\ &= (x \cos(2\varphi) + y \sin(2\varphi)) \sin(2\theta) - (x \sin(2\varphi) - y \cos(2\varphi)) \cos(2\theta) = \\ &= x(\cos(2\varphi) \sin(2\theta) - \sin(2\varphi) \cos(2\theta)) + \\ &\quad + y(\sin(2\varphi) \sin(2\theta) + \cos(2\varphi) \cos(2\theta)) = \\ &= x(\cos(-2\varphi) \sin(2\theta) + \sin(-2\varphi) \cos(2\theta)) + \\ &\quad + y(-\sin(-2\varphi) \sin(2\theta) + \cos(-2\varphi) \cos(2\theta)) = \\ &= x \sin(2\theta + (-\varphi)) + y \cos(2\theta + (-\varphi)) = \\ &= x \sin(2\theta - 2\varphi) + y \cos(2\theta - 2\varphi),\end{aligned}$$

som är den andra koordinaten i  $r_{\mathbf{0}, 2\theta - 2\varphi}(\mathbf{x})$ .

Alltså är koordinaterna i  $(s_{L_1} \circ s_{L_2})(\mathbf{x})$  och  $r_{\mathbf{0}, 2\theta - 2\varphi}(\mathbf{x})$  samma och därmed är  $(s_{L_1} \circ s_{L_2})(\mathbf{x}) = r_{2\theta - 2\varphi}(\mathbf{x})$ . Eftersom detta gäller för samtliga  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  följer  $s_{L_1} \circ s_{L_2} = r_{\mathbf{0}, 2\theta - 2\varphi}$ .

**Övning 2.9.** För att förenkla notationen skriver vi  $r_\theta$  i stället för  $r_{\mathbf{0}, \theta}$ .

Låt  $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$  och  $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ . Då gäller

$$\begin{aligned}r_\theta(\mathbf{x}) + r_\theta(\mathbf{y}) &= (x_1 \cos(\theta) - y_1 \sin(\theta), x_1 \sin(\theta) + y_1 \cos(\theta)) + \\ &\quad + (x_2 \cos(\theta) - y_2 \sin(\theta), x_2 \sin(\theta) + y_2 \cos(\theta)) = \\ &= (x_1 \cos(\theta) - y_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) - y_2 \sin(\theta), \\ &\quad x_1 \sin(\theta) + y_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) + y_2 \cos(\theta)) = \\ &= ((x_1 + x_2) \cos(\theta) - (y_1 + y_2) \sin(\theta), \\ &\quad (x_1 + x_2) \sin(\theta) + (y_1 + y_2) \cos(\theta)) = \\ &= r_\theta((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = r_\theta(\mathbf{x} + \mathbf{y}).\end{aligned}$$

Alla andra likheter visas på precis samma sätt.

**Övning 2.11.** Låt  $\theta$  vara vinkeln mellan  $L$  och  $x$ -axeln som i Figur 2.10. Vi har då att  $s_L(\mathbf{x}) = (x \cos(2\theta) + y \sin(2\theta), x \sin(2\theta) - y \cos(2\theta))$  och därmed att

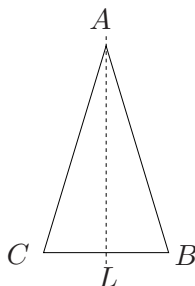
$$\|s_L(\mathbf{x})\| = \sqrt{(x \cos(2\theta) + y \sin(2\theta))^2 + (x \sin(2\theta) - y \cos(2\theta))^2}.$$

Vi förenklar uttrycket inom kvadratroten enligt

$$\begin{aligned} (x \cos(2\theta) + y \sin(2\theta))^2 + (x \sin(2\theta) - y \cos(2\theta))^2 &= \\ &= x^2(\cos(2\theta))^2 + 2xy \cos(2\theta) \sin(2\theta) + y^2(\sin(2\theta))^2 + \\ &+ x^2(\sin(2\theta))^2 - 2xy \cos(2\theta) \sin(2\theta) + y^2(\cos(2\theta))^2 = \\ &= x^2(\cos(2\theta))^2 + y^2(\sin(2\theta))^2 + x^2(\sin(2\theta))^2 + y^2(\cos(2\theta))^2 \\ &= x^2((\cos(2\theta))^2 + (\sin(2\theta))^2) + y^2((\cos(2\theta))^2 + (\sin(2\theta))^2) = \\ &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

där vi i sista steget använde oss av likheten  $(\cos(2\theta))^2 + (\sin(2\theta))^2 = 1$ . Med detta följer alltså  $\|s_L(\mathbf{x})\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\mathbf{x}\|$ . Längden av bilden  $s_L(\mathbf{x})$  är alltså lika med längden av  $\mathbf{x}$ .

**Övning 3.1.** En symmetri på en triangel är helt bestämd genom dess verkan på hörnpunkterna. Eftersom avstånden mellan hörnen måste bevaras så behöver hörnet  $A$  avbildas på sig själv. Det finns alltså två alternativ. Antingen bevaras även  $B$  och  $C$  eller så byter dessa punkter plats. I första fallet är symmetrin identitetsavbildningen, i andra fallet får vi speglingen i linjen  $L$  som i Figur 3.8. Detta är de enda symmetrierna.



**Figur 3.8:** Likbent triangel efter spegling i symmetrilinjen  $L$ .

**Övning 3.3.** En symmetri måste avbilda figuren på sig själv. Speciellt måste symmetrin avbilda den lilla liksidiga triangeln på sig själv. Därmed vet vi att symmetrierna till denna bild ger en delmängd till mängden av symmetrier på en liksidig triangel som vi såg i Exempel 3.2.3. Det är enkelt att se att alla symmetrier på den liksidiga triangeln även skickar hexagonen på sig själv så det följer att symmetrierna till vår figur är precis symmetrierna till den liksidiga triangeln.

**Övning 3.5.** Att  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$  är olika betyder att avståndet mellan dessa två punkter är strikt större än noll, det vill säga  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > 0$ . Eftersom  $f$  är en isometri får vi då att

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > 0,$$

det vill säga att avståndet mellan  $f(\mathbf{x})$  och  $f(\mathbf{y})$  är strikt större än noll. Med Övning 2.2 följer att  $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$ .

**Övning 3.7.** (i) Om linjen går genom origo så måste  $(0,0)$  tillhöra linjen. Alltså gäller  $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0$  vilket ger att  $c = 0$ , det vill säga att ekvationen för linjen är på formen  $ax + by = 0$ . Eftersom  $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$  för alla  $a, b \in \mathbb{R}$  ser vi att vi kan välja talen  $a$  och  $b$  till vad som helst, med kravet att inte båda får vara 0 (enligt definitionen för en linje).

(ii) Vi har alltså att  $L = \{(x, y) \mid ax + by = 0\}$ . Translationen  $t_{\mathbf{v}}$  är alltid en isometri och en symmetri om och endast om  $t_{\mathbf{v}}(L) = L$ . För att undersöka när dessa mängder är lika börjar vi med att ta ett element  $(x, y) \in L$ . Då gäller att  $ax + by = 0$ . Elementet  $t_{\mathbf{v}}(x, y) \in t_{\mathbf{v}}(L)$  ligger på linjen om och endast om  $a(x + v_1) + b(y + v_2) = 0$ . Med

$$a(x + v_1) + b(y + v_2) = \underbrace{(ax + by)}_{=0} + (av_1 + bv_2) = av_1 + bv_2,$$

följer att  $t_{\mathbf{v}}(x, y) \in L$  precis när  $av_1 + bv_2 = 0$ , det vill säga när punkten  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in L$ . Därmed har vi visat att  $t_{\mathbf{v}}(L) \subseteq L$  precis då  $\mathbf{v} \in L$ .

Antag nu att  $\mathbf{v} \in L$ . För alla punkter  $(x, y) \in L$  gäller då att punkten  $(x, y) - \mathbf{v} = (x - v_1, y - v_2)$  ligger på linjen eftersom

$$a(x - v_1) + b(y - v_2) = \underbrace{(ax + by)}_{=0 \text{ ty } (x,y) \in L} - \underbrace{(av_1 + bv_2)}_{=0 \text{ ty } \mathbf{v} \in L} = 0.$$

Därmed följer att

$$(x, y) = (x, y) - \mathbf{v} + \mathbf{v} = t_{\mathbf{v}}((x, y) - \mathbf{v}) \in t_{\mathbf{v}}(L).$$

Alltså har vi att  $L \subseteq t_{\mathbf{v}}(L)$ .

Vi har därmed visat att  $t_{\mathbf{v}}(L) = L$  (det vill säga att  $t_{\mathbf{v}}$  är en symmetri) om och endast om  $\mathbf{v} \in L$ .

**Övning 3.9.** (i) Vi behöver alltså visa att  $\|s_L(\mathbf{x}) - s_L(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  för alla  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ . Enligt Övning 2.9 gäller  $s_L(\mathbf{x}) - s_L(\mathbf{y}) = s_L(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  och därmed  $\|s_L(\mathbf{x}) - s_L(\mathbf{y})\| = \|s_L(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|$ . I Övning 2.11 har vi visat att speglingen bevarar avståndet från origo. Speciellt gäller här alltså att  $\|s_L(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ .

(ii) Enligt Anmärkning 2.3.12 har vi att  $s_L = t_{\mathbf{v}} \circ s_{L_0} \circ t_{-\mathbf{v}}$  där  $L_0$  är den linje som är parallell med  $L$  och går genom origo. Vi vet att translationerna  $t_{\mathbf{v}}$  och  $t_{-\mathbf{v}}$  är isometrier och från (i) har vi att  $s_{L_0}$  också är en isometri. Därmed kan  $s_L$  skrivas som en sammansättning av isometrier och är därmed själv en isometri enligt Sats 3.1.4.

**Övning 4.1.** (i) Detta är ingen grupp eftersom egenskap (iii) i Definition 4.1.1 ej gäller. I detta fall har inget positivt heltal  $n$  någon invers under addition eftersom den skulle ges av  $-n$  vilket inte ligger i  $\mathbb{N}$ .

- (ii) Detta är inte heller någon grupp eftersom egenskap (iii) i Definition 4.1.1 ej gäller. Elementet  $0 \in \mathbb{Q}$  saknar invers under multiplikation eftersom det inte finns något element  $q \in \mathbb{Q}$  så att  $0 \cdot q = 1$ .
- (iii) Detta är en grupp. Tag tre reella tal  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Då gäller att  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ . Vidare har vi att 1 verkar som ett neutralt element eftersom  $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$  för varje  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Slutligen har varje nollskilt element  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  en invers som ges av  $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Notera däremot att  $(\mathbb{R}, \cdot)$  ej är en grupp eftersom elementet 0 saknar en invers.

**Övning 4.3.** Vi har att

$$g^m * g^n = \underbrace{(g * \dots * g)}_{m \text{ gånger}} * \underbrace{(g * \dots * g)}_{n \text{ gånger}} = \underbrace{g^{m+n}}_{m+n \text{ gånger}}$$

där vi använt associativiteten hos multiplikationen för att kunna lägga ihop parenteserna.

**Övning 4.5.** (i) Vi får följande multiplikationstabell.

*	$e$	$g$	$g^2$	$g^3$	$g^4$
$e$	$e$	$g$	$g^2$	$g^3$	$g^4$
$g$	$g$	$g^2$	$g^3$	$g^4$	$e$
$g^2$	$g^2$	$g^3$	$g^4$	$e$	$g$
$g^3$	$g^3$	$g^4$	$e$	$g$	$g^2$
$g^4$	$g^4$	$e$	$g$	$g^2$	$g^3$

- (ii) Vi ser att  $g^4 * g = e$  och  $g * g^4 = e$ . Därmed är  $g^{-1} = g^4$ .
- (iii) På samma sätt ser vi i multiplikationstabellen att  $g^2 * g^3 = g^3 * g^2 = e$ , det vill säga  $(g^3)^{-1} = g^2$ .

**Övning 4.7.** Enligt Övning 4.6 behöver varje element  $e, a, b$  och  $c$  förekomma precis en gång i varje rad och kolonn.

Vi börjar med att beräkna produkten  $a * b$ . Detta element står i rad  $a$  och därför kan vi ha varken  $a * b = a$  eller  $a * b = e$ . En titt på kolonn  $b$  visar att  $a * b \neq b$ . Den enda möjligheten som är kvar är alltså  $a * b = c$ . På samma sätt följer  $b * a = c$ .

*	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$\cdot$
$b$	$b$	$c$	$e$	$\cdot$
$c$	$c$	$\cdot$	$\cdot$	$e$

I både rad  $a$  och kolonn  $a$  fattas endast elementet  $b$ . Alltså följer  $a * c = b$  och  $c * a = b$ . På samma sätt ser vi  $b * c = a$  och  $c * b = a$ . Multiplikationstabellen blir alltså följande.

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Denna grupp kallas för *Kleins fyrgrupp* efter matematikern Felix Klein.

**Övning 4.9.** Med  $x = h * g^{-1}$  gäller  $x * g = (h * g^{-1}) * g = h * (g^{-1} * g) = h * e = h$  och det återstår att visa att detta är den unika lösningen.

Antag alltså att  $x * g = h$  och  $x' * g = h$ . Speciellt har vi  $x' * g = x * g$  och därmed

$$\begin{aligned} x' &= x' * e = x' * (g * g^{-1}) = (x' * g) * g^{-1} = \\ &= (x * g) * g^{-1} = x * (g * g^{-1}) = x * e = x. \end{aligned}$$

**Övning 5.1.** Vi gör direkt det allmänna fallet (ii).

För det neutrala elementet 0 i denna grupp gäller  $0 = a \cdot 0 \in H$ . Dessutom gäller för varje  $h \in H$  att  $h = a \cdot n$  för något  $n \in \mathbb{Z}$ . Med  $-h = a \cdot (-n)$  ser vi att även inversen  $-h$  till  $h$  ligger i  $H$ . Låt slutligen  $h_1, h_2 \in H$ . Med  $h_1 = a \cdot n_1$  och  $h_2 = a \cdot n_2$  för  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  följer att  $h_1 + h_2 = a \cdot n_1 + a \cdot n_2 = a \cdot (n_1 + n_2)$  ligger i  $H$ . Alltså är  $H$  en delgrupp.

**Övning 5.3.** Unionen av två delgrupper behöver *inte* vara någon delgrupp. Titta till exempel på delgrupperna  $H_1$  och  $H_2$  i Exempel 5.1.6. Vi har  $t \in H_1$  och  $s_x \in H_2$  och därmed  $t, s_x \in H_1 \cup H_2$ . Observera att inget av elementen  $t$  och  $s_x$  ligger i båda grupper. Sammansättningen  $t \circ s_x$  finns varken i  $H_1$  eller  $H_2$  och därmed inte i unionen  $H_1 \cup H_2$ .

**Övning 5.5.** Vi behöver titta på mängderna  $\{g^n, (g^n)^2, (g^n)^3, \dots\}$  och avgöra om de innehåller samtliga element av gruppen  $G$ .

- Vi vet redan att  $G$  genereras av  $g$ .
- För  $g^2$  gäller enligt multiplikationstabellen att

$$\begin{aligned} (g^2)^1 &= g^2, \quad (g^2)^2 = g^4, \quad (g^2)^3 = (g^2)^2 * g^2 = g^4 * g^2 = g, \\ (g^2)^4 &= (g^2)^2 * (g^2)^2 = g^4 * g^4 = g^3 \text{ och } (g^2)^5 = (g^2)^4 * g^2 = g^3 * g^2 = e^2 = e. \end{aligned}$$

Därmed är samtliga element i gruppen potenser av  $g^2$  och  $G = \langle g^2 \rangle$ .

- På samma sätt beräknar vi potenserna av  $g^3$ :

$$\begin{aligned} (g^3)^1 &= g^3, \quad (g^3)^2 = g, \quad (g^3)^3 = (g^3)^2 * g^3 = g * g^3 = g^4, \\ (g^3)^4 &= (g^3)^2 * (g^3)^2 = g * g = g^2 \text{ och } (g^3)^5 = (g^3)^4 * g^3 = g^2 * g^3 = e^3 = e. \end{aligned}$$

Även här får vi samtliga element i gruppen, alltså  $G = \langle g^3 \rangle$ .

- För  $n = 4$  gäller följande.

$$(g^4)^1 = g^4, (g^4)^2 = g^3, (g^4)^3 = (g^4)^2 * g^4 = g^3 * g^4 = g^2,$$

$$(g^4)^4 = (g^4)^2 * (g^4)^2 = g^3 * g^3 = g \text{ och } (g^4)^5 = e.$$

Så  $G = \langle g^4 \rangle$ .

- Identiteten  $e = g^5$  genererar inte hela gruppen  $G$  utan  $\langle e \rangle = \{e\}$ .

Vi ser alltså att alla element förutom identiteten genererar hela gruppen.

**Övning 5.7.** Vi ser direkt att  $\langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle \subseteq \langle g_1, \dots, g_n \rangle = G$ .

Med  $g_n \in \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$  får vi att även dess invers  $g_n^{-1}$  ligger i delgruppen  $\langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$ . Alltså innehåller  $\langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$  alla element i  $G$  som kan skrivas som produkt med faktorer i mängden  $\{g_1, \dots, g_{n-1}, g_n, g_1^{-1}, \dots, g_{n-1}^{-1}, g_n^{-1}\}$ . Det vill säga att  $\langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$  innehåller hela gruppen  $G$ .

**Övning 6.1.** Vi använder Följdsats 6.2.3. Vi ser att  $M_2$  fås genom att rotera  $M_1$  med  $90^\circ$  medurs (det vill säga  $270^\circ$  moturs) och sedan förskjuta figuren två längdenheter åt höger och en längdenhet upp. Låt alltså  $\varphi$  vara isometrin  $t_{(2,1)} \circ r_{270^\circ}$ . Då gäller  $\varphi(M_1) = M_2$  och symmetrierna av  $M_1$  och  $M_2$  är relaterade via  $\varphi$ . Speciellt gäller att alla symmetrier hos  $M_2$  är på formen  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  där  $f$  är en symmetri hos  $M_1$ .

**Övning 6.3.** Antag först att (i) är sant, det vill säga  $H = \{s \circ k \circ s^{-1} \mid k \in K\}$  för något element  $s \in G$ . För att visa att (ii) är sant tag  $k \in K$ . Vi har

$$k = \text{id} \circ k \circ \text{id} = (s^{-1} \circ s) \circ k \circ (s^{-1} \circ s) = s^{-1} \circ (s \circ k \circ s^{-1}) \circ s.$$

Med elementet  $h = s \circ k \circ s^{-1}$ , som ligger i  $H$  enligt (i), kan vi därmed skriva  $k = s^{-1} \circ h \circ s = s^{-1} \circ h \circ (s^{-1})^{-1}$ . För  $t = s^{-1}$  gäller alltså att  $K \subseteq \{t \circ h \circ t^{-1} \mid h \in H\}$ . För att visa den omvända inklusionen, det vill säga att  $\{t \circ h \circ t^{-1} \mid h \in H\} \subseteq K$ , tag ett element  $t \circ h \circ t^{-1}$  med  $h \in H$ . Enligt (i) finns det  $k \in K$  med  $h = s \circ k \circ s^{-1}$ . Vi får då

$$t \circ h \circ t^{-1} = s^{-1} \circ (s \circ k \circ s^{-1}) \circ s = (s^{-1} \circ s) \circ k \circ (s^{-1} \circ s) = \text{id} \circ k \circ \text{id} = k$$

som alltså ligger i  $K$ .

Implikationen att (ii) medför (i) fås genom att byta roll på  $H$  och  $K$  i argumenten ovan.

Speciellt ser vi att  $t = s^{-1}$ .

Detta kan nu tillämpas på Definition 6.2.4. Den ena implikationen följer direkt av definitionen. Låt alltså  $H$  och  $K$  vara delgrupper av gruppen av isometrier i planet som är konjugerade med en translation. Om  $K = \{t_a \circ h \circ t_a^{-1} \mid h \in H\}$  för någon translation  $t_a$  kan vi sätta  $b = a$  och är klara. Antag alltså att  $H = \{t_a \circ k \circ t_a^{-1} \mid k \in K\}$ . Enligt våra funderingar ovan vet vi att också  $K = \{(t_a)^{-1} \circ h \circ t_a \mid h \in H\}$ . Med  $b = -a$  gäller  $(t_a)^{-1} \circ h \circ t_a = t_b \circ h \circ t_b^{-1}$  för alla  $h \in H$  och därmed  $K = \{t_b \circ h \circ t_b^{-1} \mid h \in H\}$ .

**Övning 6.5.** Vi vet från Anmärkning 2.3.12 att speglingen i linjen  $\{x = b\}$  ges av  $s_b = t_b \circ s_y \circ t_{-b}$  vilket enligt Sats 5.3.1 är lika med  $s_b = t_{2b} \circ s_y$ . Därmed har vi att gruppen som genereras av  $t_1$  och speglingen i linjen  $\{x = b\}$  är lika med  $\langle t_1, t_{2b} \circ s_y \rangle$ . Nu ser vi från Hjälpsats 6.2.6 att  $t_{-b} \circ t_1 \circ t_b = t_1$  och  $t_{-b} \circ (t_{2b} \circ s_y) \circ t_b = s_y$ . Därmed har vi att grupperna  $\langle t_1, s_b \rangle$  och  $\langle t_1, s_y \rangle$  är konjugerade med translationen  $t_{-b}$ .

Om vi låter  $M$  vara ett mönster som har sin symmetrigrupp genererad av  $t_1$  och  $s_b$  så vet vi alltså att mönstret har en spegelsymmetri i den vertikala linjen  $\{x = b\}$ . Eftersom konjugering med  $t_{-b}$  flyttar origo med sträckan  $b$  till vänster och ett mönster ser likadant ut oberoende på var man sätter origo så har vi att mönstret  $M$  även har symmetrigrupp  $\langle t_1, s_y \rangle$ . Dessa två grupper borde alltså vara konjugerade.

**Övning 6.7.** Först och främst ser vi att  $G_1 = \langle t_1 \rangle$  och  $G_3 = \langle g \rangle$  båda är genererade av ett element och är därmed abelska enligt Övning 5.8.

Tag nu två element  $h_1, h_2 \in G_2 = \langle t_1, s_x \rangle$ . Per definition vet vi att dessa element är en produkt av potenser  $t_1^n$  och  $s_x^m$  för några heltal  $m$  och  $n$ . Vi vet att  $s_x^m \in \{\text{id}, s_x\}$  och från Sats 5.3.1 har vi att både  $\text{id} \circ t_a = t_a \circ \text{id}$  och  $s_x \circ t_a = t_a \circ s_x$  för alla  $a \in \mathbb{R}$ . Det betyder att vi kan ordna om faktorerna i  $h_1 \circ h_2$  en i taget tills dess att vi fått  $h_2 \circ h_1$ . Därmed har vi att  $G_2 = \langle t_1, s_x \rangle$  också är abelsk.

Vi har dock enligt Sats 5.3.1 att  $t_1 \circ s_y \neq s_y \circ t_1$  och  $t_1 \circ r \neq r \circ t_1$  vilket betyder att grupperna  $G_4 = \langle t_1, s_y \rangle$ ,  $G_5 = \langle t_1, r \rangle$ ,  $G_6 = \langle g, r \rangle$  och  $G_7 = \langle t_1, s_x, s_y \rangle$  ej kan vara abelska eftersom  $t_1$  och någon av  $s_y$  och  $r$  ligger i alla dessa grupper.

**Övning 7.1.** Alla beräkningar som behövs för att visa detta har vi redan gjort i Sats 5.3.1. Vi sammanfattar dessa beräkningar i följande multiplikationstabell.

◦	id	$s_x$	$s_y$	$r$
id	id	$s_x$	$s_y$	$r$
$s_x$	$s_x$	id	$r$	$s_y$
$s_y$	$s_y$	$r$	id	$s_x$
$r$	$r$	$s_y$	$s_x$	id

Uppenbarligen är id det neutrala elementet, alla element har sig själva som invers och associativiteten följer som vanligt från Hjälpsats 1.4.1.

**Övning 7.3. Fall 2:**  $b - d = \frac{1}{2}$ ; det vill säga  $b = d + \frac{1}{2}$  och  $G$  innehåller glidspeglingen  $g = t_{1/2} \circ s_x = t_{b-d} \circ s_x$ . Då gäller enligt Hjälpsatserna 7.2.1, 7.2.4 och 7.2.6 att alla element i  $G$  är av formen  $t_1^n$ ,  $t_1^n \circ g$ ,  $t_1^n \circ (t_{d+\frac{1}{2}} \circ s_y)$  eller  $t_1^n \circ (t_d \circ r)$  för något heltal  $n$ . Med andra ord, vi ser att  $G$  genereras av elementen  $t_1$ ,  $g$ ,  $t_{d+\frac{1}{2}} \circ s_y$  och  $t_d \circ r$ . För att göra oss av med  $d$  tittar vi på translationen  $t_{-d/2}$ . Enligt Följdsats 6.2.3 är  $G$  konjugerad till gruppen som generas av elementen  $t_{-d/2} \circ t_1 \circ t_{d/2}$ ,  $t_{-d/2} \circ g \circ t_{d/2}$ ,  $t_{-d/2} \circ (t_{d+\frac{1}{2}} \circ s_y) \circ t_{d/2}$  och  $t_{-d/2} \circ (t_d \circ r) \circ t_{d/2}$ . Vi beräknar dessa produkter enligt Hjälpsats 6.2.6

till

$$\begin{aligned}
t_{-d/2} \circ t_1 \circ t_{d/2} &= t_1, \\
t_{-d/2} \circ g \circ t_{d/2} &= g, \\
t_{-d/2} \circ (t_{d+\frac{1}{2}} \circ s_y) \circ t_{d/2} &= t_{d+\frac{1}{2}} \circ t_{-d/2} \circ s_y \circ t_{d/2} = t_{d+\frac{1}{2}} \circ t_{-\frac{2d}{2}} \circ s_y \\
&= t_{d+\frac{1}{2}-d} \circ s_y = t_{1/2} \circ s_y \\
t_{-d/2} \circ (t_d \circ r) \circ t_{d/2} &= t_d \circ t_{-d/2} \circ r \circ t_{d/2} = t_d \circ t_{-\frac{2d}{2}} \circ r = \\
&= t_{d-d} \circ r = r.
\end{aligned}$$

Vi har alltså att frisgruppen  $G$  är konjugerad till gruppen  $\langle t_1, g, t_{1/2} \circ s_y, r \rangle$ . Slutligen ser vi att  $t_1 = g^2$  och  $t_{1/2} \circ s_y = t_{1/2} \circ s_x \circ r = g \circ r$ . Vi kan alltså uttrycka alla generatorer med hjälp av  $g$  och  $r$ . Med då gäller som i Övning 5.7 att  $\langle t_1, g, t_{1/2} \circ s_y, r \rangle = \langle g, r \rangle$ , som är frisgruppen  $G_6$  från Exempel 5.3.7.

**Fall 3:**  $b - d = -\frac{1}{2}$ ; det vill säga  $b = d - \frac{1}{2}$  och  $G$  innehåller symmetrin  $t_{b-d} \circ s_x = t_{-1/2} \circ s_x$ . Sammansättning med  $t_1$  visar att glidspeglingen  $g = t_{1/2} \circ s_x = t_1 \circ (t_{-1/2} \circ s_x)$  ligger i  $g$ . Enligt Hjälpsetserna 7.2.1, 7.2.4 och 7.2.6 är alla element i  $G$  är av formen  $t_1^n$ ,  $t_1^n \circ g$ ,  $t_1^n \circ (t_{d-\frac{1}{2}} \circ s_y)$  eller  $t_1^n \circ (t_d \circ r)$  för något heltal  $n$ , det vill säga  $G = \langle t_1, g, t_{d-\frac{1}{2}} \circ s_y, t_d \circ r \rangle$ . Som innan använder vi oss av translationen  $t_{-d/2}$  för att göra oss av med  $d$ . Enligt Följdsats 6.2.3 är  $G$  konjugerad till gruppen med generatorerna  $t_{-d/2} \circ t_1 \circ t_{d/2}$ ,  $t_{-d/2} \circ g \circ t_{d/2}$ ,  $t_{-d/2} \circ (t_{d-\frac{1}{2}} \circ s_y) \circ t_{d/2}$  och  $t_{-d/2} \circ (t_d \circ r) \circ t_{d/2}$ . Vi beräknar generatorerna enligt Hjälpsets 6.2.6 till

$$\begin{aligned}
t_{-d/2} \circ t_1 \circ t_{d/2} &= t_1, \\
t_{-d/2} \circ g \circ t_{d/2} &= g, \\
t_{-d/2} \circ (t_{d-\frac{1}{2}} \circ s_y) \circ t_{d/2} &= t_{d-\frac{1}{2}} \circ t_{-d/2} \circ s_y \circ t_{d/2} = t_{d-\frac{1}{2}} \circ t_{-\frac{2d}{2}} \circ s_y = \\
&= t_{d-\frac{1}{2}-d} \circ s_y = t_{-1/2} \circ s_y, \\
t_{-d/2} \circ (t_d \circ r) \circ t_{d/2} &= t_d \circ t_{-d/2} \circ r \circ t_{d/2} = t_d \circ t_{-\frac{2d}{2}} \circ r = \\
&= t_{d-d} \circ r = r.
\end{aligned}$$

Vi har alltså att frisgruppen  $G$  är konjugerad till gruppen  $\langle t_1, g, t_{-1/2} \circ s_y, r \rangle$ . Observera att  $t_{1/2} \circ s_y = t_1 \circ (t_{-1/2} \circ s_y)$ . Därmed kan vi byta ut generatorm  $t_{-1/2} \circ s_y$  mot symmetrin  $t_{1/2} \circ s_y$ , se Sats 5.2.8. Det gäller alltså att

$$\langle t_1, g, t_{-1/2} \circ s_y, r \rangle = \langle t_1, g, t_{1/2} \circ s_y, r \rangle = \langle g, r \rangle,$$

som är samma grupp som i Fall 2.

**Övning 7.5.** (i) Vi kan välja origo så att mönstret är spegelsymmetriskt i  $y$ -axeln. Spegelsymmetri i  $x$ -axeln har vi dock inte. Enligt algoritmen är då nästa fråga om vi har glidspegling vilket vi ser att vi har. Alltså, vi svarar "Ja  $\rightarrow$  Nej  $\rightarrow$  Ja" vilket enligt algoritmen ger oss att mönstrets symmetrigrupp är  $G_6$ .



- (ii) Första frågan kan vi svara "Ja" på genom att lägga vårt origo i mitten av en av diamant-formerna. På andra frågan blir svaret också "Ja" vilket enligt algoritmen ger oss att mönstrets symmetrier ges av gruppen  $G_7$ .
- (iii) Eftersom "staplarna" är vinklade så kan vi inte välja origo på så sätt att mönstret har spegelsymmetri i  $y$ -axeln, så svaret på första frågan är "Nej". Vi har inte heller någon spegelsymmetri i  $x$ -axeln. Tredje frågan blir därmed om vi har rotationssymmetri vilket vi inte heller har på grund av linjen längst ner på mönstret. Då svaret på frågan om vi har någon glidspeglning i mönstret också är "Nej" säger algoritmen att mönstret har frisgrupp  $G_1$ .

**Övning 7.7.** (i) Vi såg i Övning 6.7 att  $G_2$  är en abelsk grupp men att grupperna  $G_4$  till  $G_7$  inte är abelska. Enligt Övning 7.6 (iii) följer därmed resultatet direkt.

- (ii) Antag att  $G_1$  och  $G_2$  är isomorfa. Enligt Övning 7.6 (ii) vet vi att vi i så fall måste ha en isomorfi åt båda hållen. Vi väljer därför att betrakta isomorfin  $\varphi: G_2 \rightarrow G_1$ .

Den stora skillnaden mellan de två grupperna är elementet  $s_x$  med egenskapen att dess kvadrat är identiteten,  $s_x^2 = s_x \circ s_x = \text{id}$ , vilket inte gäller för något element i  $G_1$ . Nu noterar vi att  $\varphi(s_x \circ s_x) = \varphi(s_x) \circ \varphi(s_x)$  eftersom  $\varphi$  är en isomorfi. Då  $s_x \circ s_x = \text{id}$  får vi från Övning 7.6(i) att

$$\text{id} = \varphi(\text{id}) = \varphi(s_x \circ s_x) = \varphi(s_x) \circ \varphi(s_x) = \varphi(s_x)^2.$$

Men då  $\varphi(s_x)$  behöver ligga i gruppen  $G_1 = \langle t_1 \rangle$  så är den enda möjligheten att  $\varphi(s_x) = \text{id}$  (eftersom inga andra element i  $\langle t_1 \rangle$  har en kvadrat som blir identiteten). Detta är dock en motsägelse mot att  $\varphi$  är inverterbar eftersom vi nu får att  $\varphi(s_x) = \text{id} = \varphi(\text{id})$ . Inversen  $\varphi^{-1}$  kan på grund av detta inte existera eftersom det skulle kräva att  $\varphi^{-1}(\text{id}) = \text{id}$  samtidigt som  $\varphi^{-1}(\text{id}) = s_x$  vilket är en omöjlighet. Så någon isomorfi mellan  $G_1$  och  $G_2$  kan ej finnas.

## A Geometri

Detta avsnitt är tänkt som extramaterial till Kapitel 2. Där hävdade vi i Påstående 2.1.8 att två cirklar kan skära varandra i högst två punkter och att linjen mellan mittpunkterna alltid är vinkelrät mot linjen mellan skärningspunkterna. Ritar man en ordentlig bild av två cirklar så verkar detta uppenbart men vi behöver ändå ha ett rigoröst bevis. När man arbetar med geometri så blir det ibland svårt att särskilja vad som antas vara sant och vad som behöver bevisas. I Kapitel 1 så pratade vi om hur man bevisar saker givet vissa påståenden som vi antar är sanna, så kallade axiom.

Inom *klassisk* eller *Euklidisk geometri* betraktar man punkter, linjer och plan i det tredimensionella rummet som uppfyller de så kallade *Hilberts axiom*. Det vill säga vi förutsätter vissa egenskaper eller relationer mellan punkter, linjer och plan. Bland annat ska det gälla att

- Två punkter bestämmer en linje.
- En linje och punkt utanför linjen bestämmer ett plan.
- Om tre punkter ligger på en linje så ligger precis en av punkterna mellan de andra.
- För varje linje  $L$  och varje punkt  $P$  utanför linjen finns det precis en linje genom  $P$  som inte skär  $L$  och som ligger i planet som bestäms av  $P$  och  $L$ .

Den intresserade kan läsa om alla dessa grundegenskaper i Robin Hartshornes bok *Geometry: Euclid and beyond* (se *Förslag till vidare läsning* på sida 86).

Det följer direkt av axiomen att till exempel två icke-parallella linjer skär varandra i precis en punkt. Även ovan nämnda Påstående 2.1.8 följer av dessa antaganden.

### A.1 Bevis av Påstående 2.1.8

Vi börjar med två hjälpsatser.

**Hjälpsats A.1.1.** *En cirkel och en linje kan skära varandra i högst två punkter.*

*Bevis.* En cirkel är alla punkter  $(x, y)$  som uppfyller en ekvation på formen  $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$  där  $a, b, r \in \mathbb{R}$  och  $r \geq 0$ , se Exempel 2.1.7. Dessutom har vi sett i Exempel 2.2.1 att en linje beskrivs antingen av en ekvation på formen  $y = kx + m$  med  $k, m \in \mathbb{R}$  eller av en ekvationen på formen  $x = d$  där  $d \in \mathbb{R}$ . I det första fallet sätter vi in relationen  $y = kx + m$  i ekvationen för cirkeln och får att  $\sqrt{(x-a)^2 + (kx+m-b)^2} = r$ . Lösningarna till denna

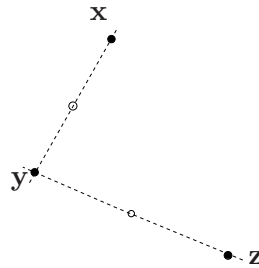
ekvation ger precis skärningspunkterna mellan linjen och cirkeln. Kvadrering av båda sidorna ger ekvationen

$$(x - a)^2 + (kx + m - b)^2 = r^2.$$

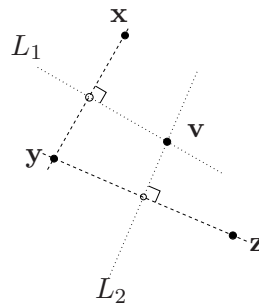
Detta andragradspolynom i variabeln  $x$  har maximalt två lösningar som kan beräknas med hjälp av till exempel kvadratkomplettering. I fallet av en vertikal linje ger insättning av  $x = d$  ekvationen  $(d - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Detta är ett andragradspolynom i variabeln  $y$  som också kan ha maximalt två lösningar vilket motsvarar högst två skärningspunkter.  $\square$

**Hjälpssats A.1.2.** *Låt  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  vara tre punkter i planet som inte ligger på någon linje. Då finns det en unik cirkel som går genom dessa punkter.*

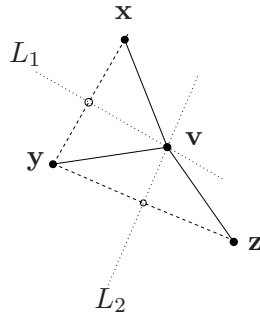
*Bevis.* Vi börjar med att rita ut linjen genom  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$  och märker ut mittpunkten mellan  $\mathbf{x}$  och  $\mathbf{y}$ . Sedan gör vi samma sak med  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$ .



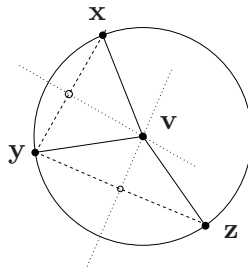
Nu ritas vi ut de två linjerna som är vinkelräta mot våra tidigare linjer och som går genom mittpunkterna. Kalla dessa linjer för  $L_1$  och  $L_2$  och observera att de inte är parallella eftersom punkterna  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  ej ligger på en linje. Därmed skär de varandra i en unik punkt som vi kallar för  $\mathbf{v}$ .



Dra nu linjer från denna skärningspunkt  $\mathbf{v}$  till  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$ .



Notera att linjen  $L_1$  per konstruktion består av de punkter som har samma avstånd till  $x$  som till  $y$ . Speciellt gäller detta för punkten  $v$ . Dessutom ligger  $v$  på linjen  $L_2$  som består av de punkter som har samma avstånd till  $y$  som till  $z$ . Det betyder alltså att  $v$  har samma avstånd till alla tre punkter  $x$ ,  $y$  och  $z$ . Kalla detta avstånd för  $r$ . Då har vi alltså att punkterna  $x$ ,  $y$  och  $z$  ligger på cirkeln med radie  $r$  och mittpunkt  $v$ .



Slutligen ser vi att mittpunkten av varje cirkel som går genom  $x$ ,  $y$  och  $z$  behöver ligga på båda linjer  $L_1$  och  $L_2$ . Eftersom två icke-parallella linjer alltid skär varandra i en unik punkt så vet vi att mittpunkten på denna cirkel är punkten  $v$  och därmed är cirkeln som vi konstruerat den enda möjliga.  $\square$

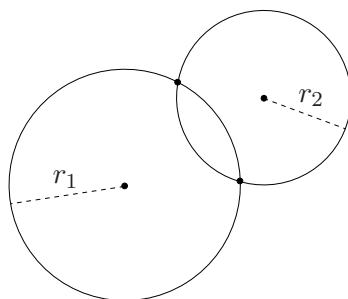
**Sats A.1.3.**  *Två olika cirklar kan skära varandra i högst två punkter.*

*Bevis.* Antag att det finns två cirklar som har mer än två skärningspunkter. Det betyder att det finns minst tre punkter som ligger på båda cirklarna. Eftersom vi i Hjälpsats A.1.1 visade att en linje kan ha högst två skärningspunkter med en cirkel så följer det att dessa tre punkter ej kan ligga på en linje. Enligt Hjälpsats A.1.2 så innebär detta att de två cirklarna är lika.  $\square$

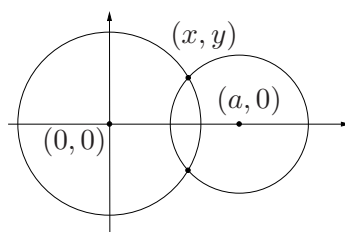
Nu är vi redo för att visa den andra delen av påståendet som vi gav i Kapitel 2.

**Sats A.1.4.**  *Betrakta två cirklar som skär varandra i två punkter. Då är linjen mellan mittpunkterna av cirklarna vinkelrät mot linjen mellan skärningspunkterna.*

*Bevis.* Antag att vi har två cirklar, med radier  $r_1$  och  $r_2$ , som skär varandra i två punkter som i denna bild.



Vi kan nu välja att rita ut vårt koordinatsystem som i följande bild.



Det vill säga att vi antar att cirkeln med radie  $r_1$  har mittpunkt i origo och den andra, som har radie  $r_2$ , har en mittpunkt någonstans på  $x$ -axeln, säg i punkten  $(a, 0)$ .

Låt nu punkten  $(x, y)$  vara en av cirkelarnas skärningspunkter. Då gäller att

$$\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = r_1$$

och

$$\|(x, y) - (a, 0)\| = \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = r_2.$$

Vi ser nu att om detta gäller så gäller även att

$$\|(x, -y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = r_1$$

och

$$\|(x, -y) - (a, 0)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (-y)^2} = \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = r_2.$$

Det vill säga att  $(x, -y)$  också ligger på båda dessa cirklar så denna punkt är också en skärningspunkt. Vi visar nu att  $(x, y) \neq (x, -y)$ . Om de vore lika så skulle vi ha att  $y = -y$ , det vill säga att  $y = 0$ . Det betyder att cirkelarna skär varandra i en punkt på  $x$ -axeln, men i så fall så kan cirkelarna inte ha två skärningspunkter vilket motsäger vårt antagande. Därmed är  $(x, y) \neq (x, -y)$ .

Då två cirklar kan ha högst två skärningspunkter har vi hittat alla. Vi ser nu att linjen mellan mittpunkterna är parallell med  $x$ -axeln och linjen mellan skärningspunkterna  $(x, y)$  och  $(x, -y)$  är parallell med  $y$ -axeln. Eftersom  $x$ -axeln och  $y$ -axeln är vinkelräta så följer påståendet.  $\square$

## Förslag till vidare läsning

Armstrongs bok *Groups and symmetry* är en mycket trevlig bok som, precis som detta kompendium, är helt inriktad på att använda gruppteori för att förklara symmetrier hos olika objekt, men som inte begränsar sig till att enbart titta på frismönster. Till exempel visar han att det finns exakt sjutton stycken olika symmetristrukturer hos tapetmönster. Detta gör han med liknande metoder till de vi har presenterat i detta kompendium för att visa att det finns sju olika symmetristrukturer hos frismönster. För detta krävs dock mer teori än vad vi har utrymme för i detta kompendium och denna teori har Armstrong med i sin bok.

Även boken *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry* handlar om symmetrier av plana mönster och geometriska objekt. Författaren har dock inte nöjt sig med enbart symmetrier i planet utan tittar även på tredimensionella objekt så som de platonska kropparna. Man ska dock vara medveten om att knappt någon gruppteori behandlas, så man behöver troligtvis leta efter andra källor om man vill kunna förstå alla resonemang.

*Abstract Algebra* av Dummit och Foote är en trevlig men krävande bok som är bra för den som vill lära sig mer algebra. Den börjar med definitionen för grupper och bygger vidare med ett flertal andra algebraiska objekt så som *ringar* och *kroppar*. Var dock medveten om att boken är ganska kompakt skriven och kan därför vara lite svårläst på sina ställen. Man kan däremot vara säker på att det är en mycket bra bok som man kan ha användning för en lång tid framöver.

Boken *Diskret matematik - Fördjupning* är också en bra bok om man vill lära sig mer gruppteori. Den är dessutom skriven på svenska. Var dock medveten om att detta är tänkt som en fortsättning till boken *Diskret matematik och diskreta modeller* (som också är en bra bok men inte har särskilt mycket med detta kompendium att göra) av samma författare så vissa ämnen förväntas läsaren kunna. Båda dessa böckerna har ett svensk-engelskt lexikon för olika matematiska termer.

Hartshornes bok *Geometry: Euclid and beyond* har som mål att förklara Euklides klassiska bok *Elementa*, som bland annat definierar och bevisar flertalet satser om (Euklidisk) geometri, på ett sätt som är lättillgängligt för oss i nutid. Även denna är en krävande bok så man ska som läsare vara förberedd på att behöva arbeta för att kunna förstå allting. Det är en trevlig läsning och boken har så mycket material att den nästan kan vara lite avskräckande.

- [1] Mark A. Armstrong: *Groups and Symmetry*. 2:a upplagan. Springer, 1988.
- [2] George E. Martin: *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. Springer, 1982
- [3] David S. Dummit & Richard M. Foote: *Abstract Algebra*. 3:e upplagan. John Wiley & Sons, 2003

- [4] Kimmo Eriksson & Hillevi Gavel: *Diskret matematik - Fördjupning*. Studentlitteratur AB, 2003
- [5] Robin Hartshorne: *Geometry: Euclid and beyond*. 1:a upplagan. Springer, 2000

Böckerna ovan, och många andra böcker, finns att låna på KTH:s bibliotek, Osquars backe 31. Biblioteket är öppet för alla.

## Sakregister

- abelsk, 35
- Alhambragrupp, 68
- Alhambramönster, 18
- antagande, 8
- associativitet, 35
- avbildning, 4
  - inverterbar, 5
- avstånd, 15
- axiom, 8
  
- bevis, 6
- bilden
  - av en mängd, 4
  - av ett element, 3
  
- cirkel, 15
  
- delgrupp, 43
- delmängd, 1
- disjunkta mängder, 2
  
- ekvivalent, 7
- element, 1
- Euklidiska planet, 13
  
- förskjutning, 19
- frisgrupp, 54
- frismönster, 17
- funktion, 3
  
- generatorer, 45
- glidspegling, 47
- grupp, 35
- gruppaxiom, 35
  
- heltal, 2
  
- identiteten, 4
- implicera, 7
- invers, 5, 35
- isometri, 23
  - gruppen, 37
- isomorfa, 70
- isomorfi, 70
  
- kommutativ, 35
  
- konjugerade, 57
  
- längd, 14
- likhet mellan funktioner, 5
- linje, 17
  
- mängd, 1
  - delmängd, 1
  - disjunkt, 2
  - snitt, 2
  - union, 2
  
- naturliga tal, 2
- neutralt element, 35
- norm, 14
  
- om och endast om, 7
- operation, 35
- origo, 14
- ortogonala gruppen, 61
  
- påstående, 6
- postulat, 8
- punkt, 13
  
- rationella tal, 3
- reella tal, 3
- rotation, 20
  
- sammansättning, 4
- snitt av mängder, 2
- spegling, 20
- symmetri, 30
  - gruppen, 37
  
- tal
  - hel-, 2
  - naturligt, 2
  - rationellt, 3
  - reellt, 3
- talplanet, 13
- tapetmönster, 18
- translation, 19
- translationsinvariant, 31
  
- union av mängder, 2