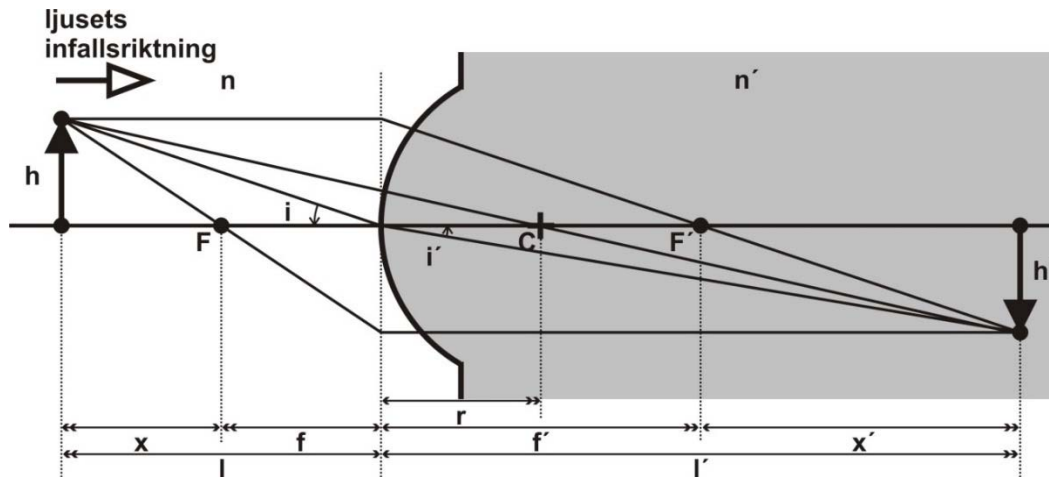


# Avbildningskvalitet

## Föreläsning 1-2: Sfärisk aberration och koma

### Repetition: brytning och avbildning i sfärisk yta och tunn lens



Figur 1: **Figur 3.12 och 3.18 i Optics.**

- Teckenkonventionen: ljus in från vänster, sträcka i ljusets riktning = positiv
- Brytningslagen (Snells lag):

$$n \sin i = n' \sin i'$$

- Paraxial approximation (vid små vinklar mätt i radianer, se tabell 3.1 i *Optics*):

$$\sin i \approx \tan i \approx i \quad (\text{obs radianer!})$$

$$n i = n' i',$$

- De paraxiala avbildningsformlerna:

$L' = L + F$	$f = -\frac{n}{F}$	$f' = \frac{n'}{F}$
$m = \frac{h'}{h} = \frac{L}{L'}$	$L = \frac{n}{l}$	$L' = \frac{n'}{l'}$

Newtons relation:

$m = \frac{h'}{h} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x}$ $xx' = ff'$
--

$L, L', F, F'$  anges i dioptrier (=1/meter) och  $h, h', l, l', f, f', x, x'$  anges i meter.

### Ovanstående formler gäller samtliga optiska system!

(Ex. sfärisk gränsyta, tunna linser, tjocka linser och sammansatta system (om man använder huvudplan))

- Styrka för sfärisk yta:

$$F_{\text{sfärisk yta}} = \frac{(n' - n)}{r}$$

- Styrka för tunn lins:

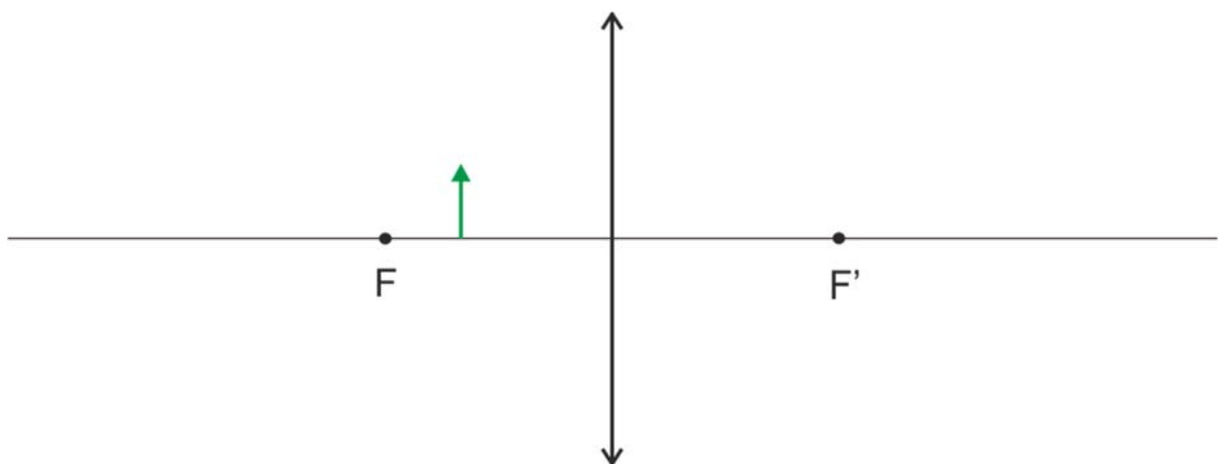
$$F_{\text{tunn lins}} = \frac{(n_{\text{lins}} - n)}{r_1} + \frac{(n' - n_{\text{lins}})}{r_2}$$

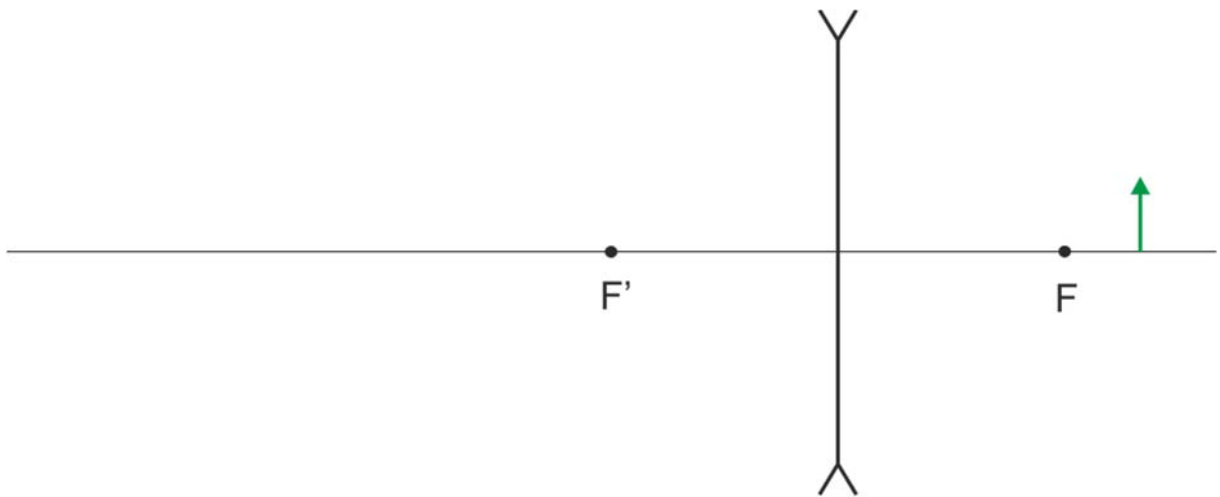
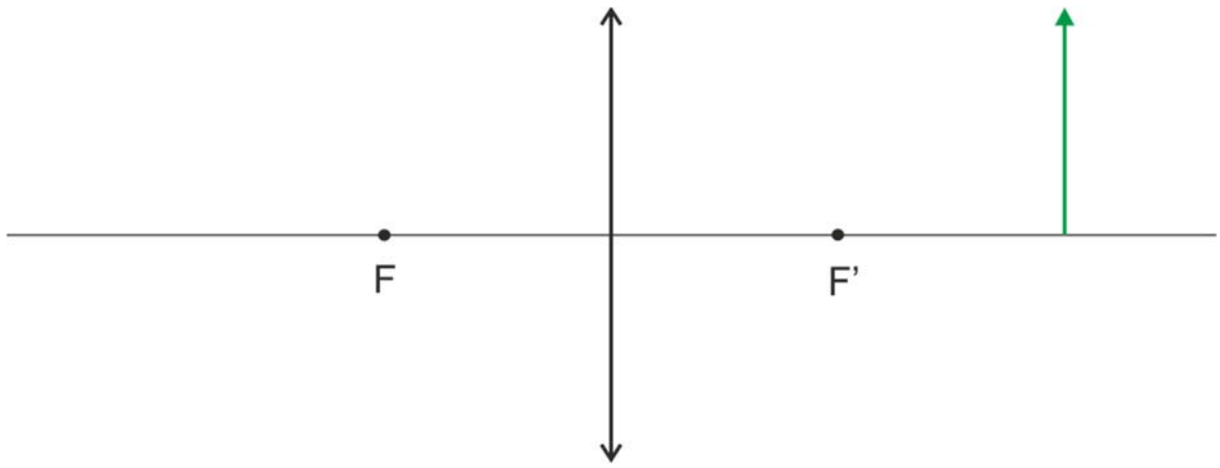
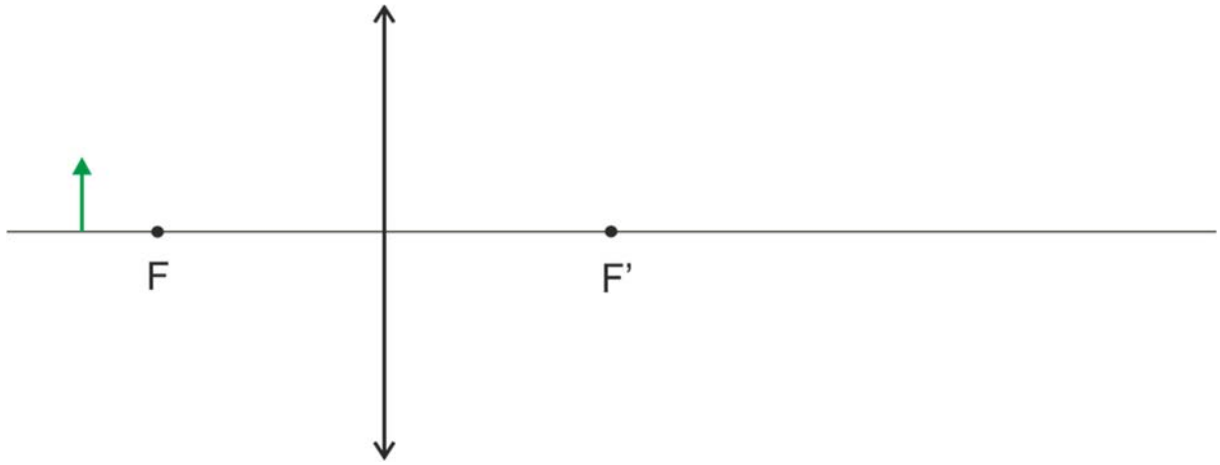
### Repetition: strålkonstruktion i tunn lins

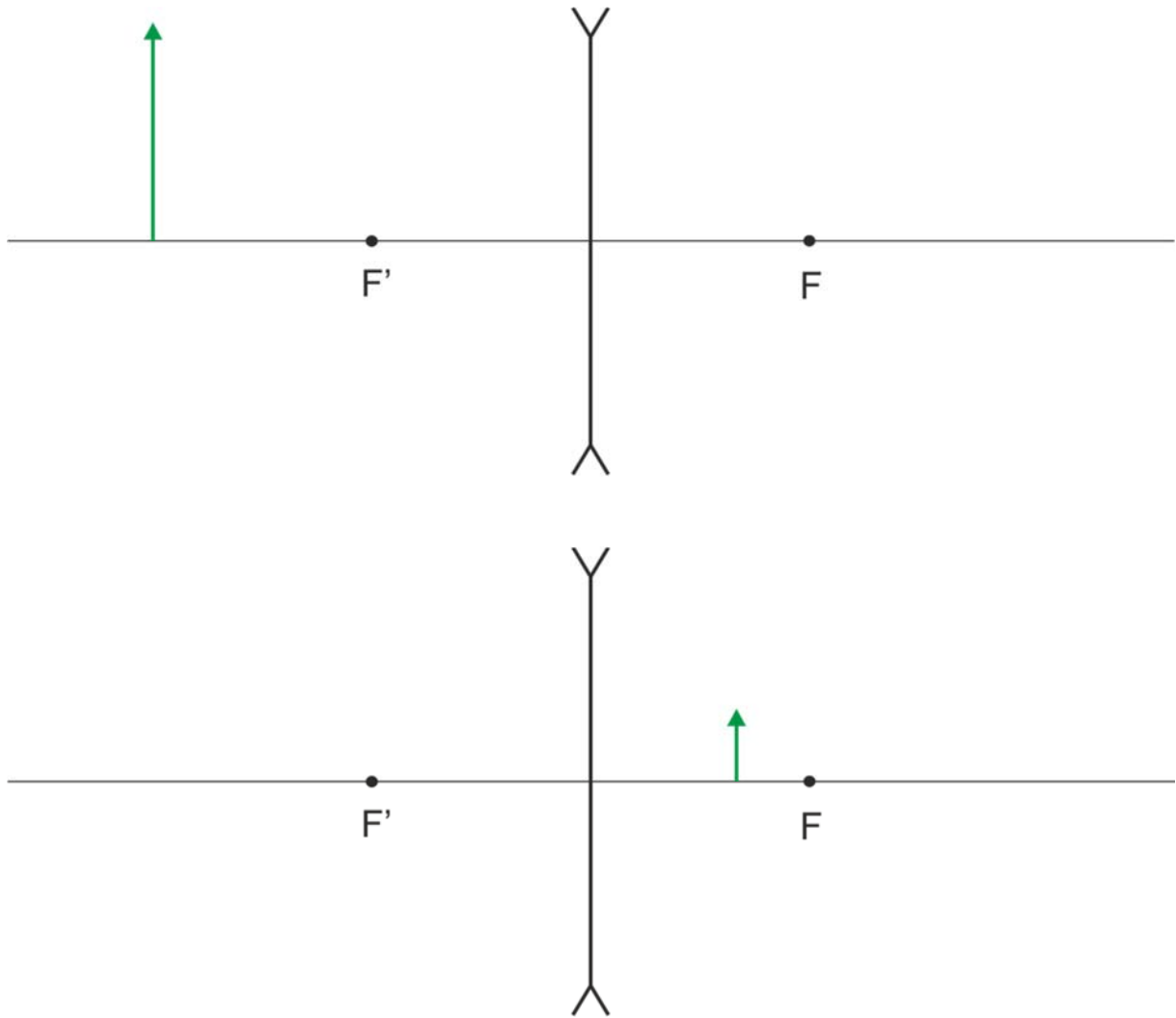
Strålkonstruktion med tunn lins i luft. Använd minst 2 av följande 3 strålar:

- Stråle från toppen av objektet som kommer in parallellt med optiska axeln bryts genom / siktades mot linsens bakre fokuspunkt  $F'$
- Stråle från toppen av objektet som kommer in genom / siktades mot linsens främre fokuspunkt  $F$  kommer ut parallellt med optiska axeln
- Stråle från toppen av objektet går obruten genom mitten av linsen  
(OBS gäller endast om det är samma brytningsindex på båda sidor om linsen.  
Gäller alltså inte sfärisk gränsyta)

*Se exempel nedan på strålkonstruktionsuppgifter med reella och virtuella objekt för positiva och negativa linser belägna i luft!*







### Repetition: avbildning i system av tunna linser = mellanbild

- Avbilda objektet genom första linsen:
- Bilden till första linsen är en mellanbild och objekt till andra linsen
- Avbilda mellanbilden genom andra linsen:
- Repetera för nästa lins.

$$L'_1 = L_1 + F_1$$

$$l'_1 \Rightarrow l_2$$

$$L'_2 = L_2 + F_2$$

## När paraxial approximation inte gäller

Använd brytningslagen:  $n \sin i = n' \sin i'$  och följ varje stråle, en i taget (görs ofta på dator med strålberäkningsprogram).

Exempel: Planokonvex lins i luft

$$n_{lins} = 1,5 \quad n_{luft} = 1 \quad r_1 = \infty \text{ m} \quad r_2 = -0,06 \text{ m} \quad L = 0 \text{ D (avlägsset objekt)}$$

Paraxiala beräkningar:

$$F = F_1 + F_2 = \frac{(n_{lins} - n_{luft})}{r_1} + \frac{(n_{luft} - n_{lins})}{r_2} = \frac{(1,5 - 1)}{\infty} + \frac{(1 - 1,5)}{-0,06} = 0 \text{ D} + 8,33 \text{ D} = 8,33 \text{ D}$$

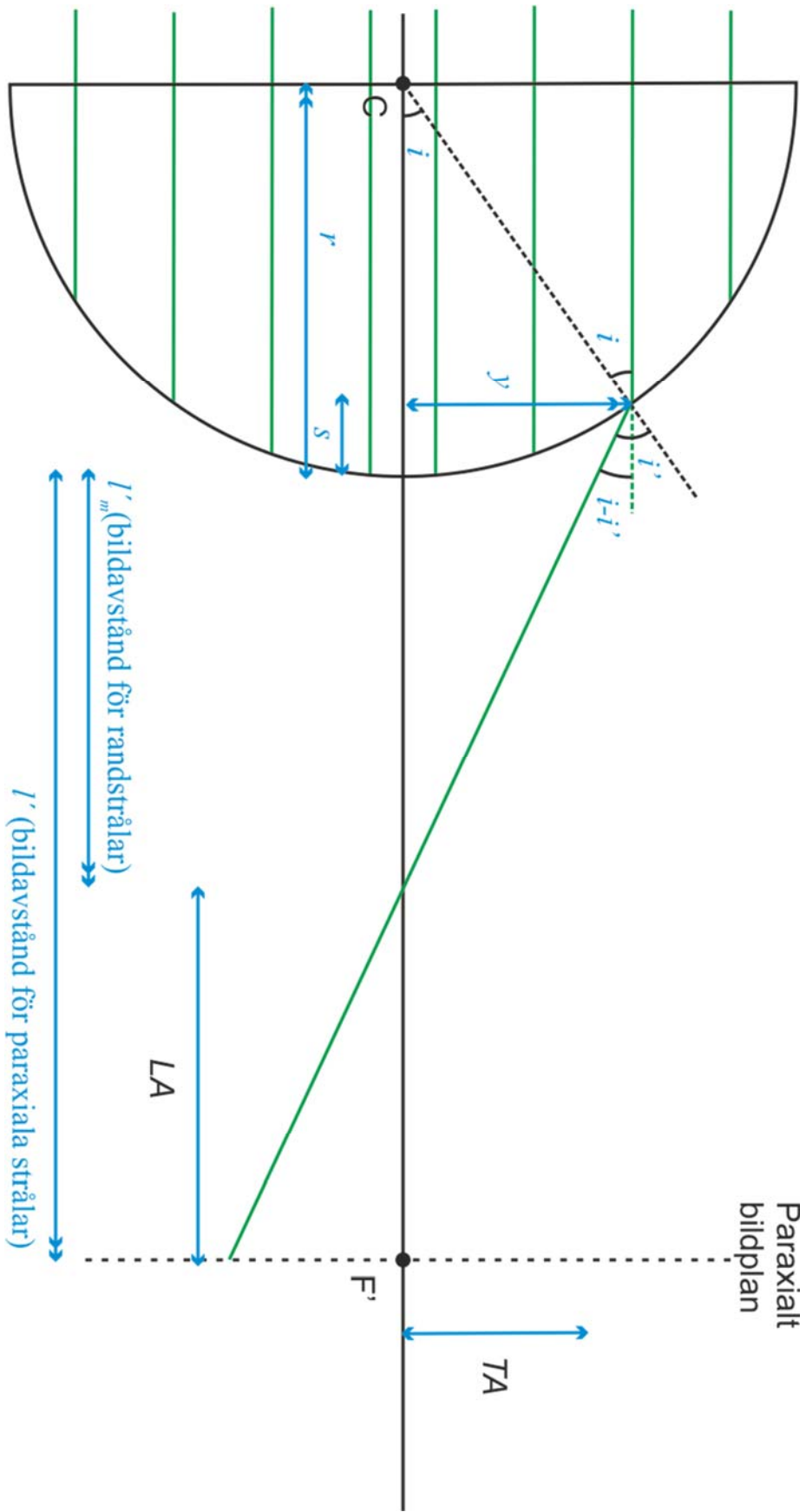
$$L' = L + F = 0 + 8,33 \text{ D} = 8,33 \text{ D} \quad \Rightarrow \quad l' = \frac{1}{8,33 \text{ D}} = 12 \text{ cm}$$

(bildavståndet blir detsamma även om vi räknat på tjock lins, varför?)

Följ strålar enligt figuren på nästa sida och använd följande formler för brytningen i linsens andra yta (den krökta):

$$\sin i = \frac{y}{|r_2|}, \quad s = |r_2| \cdot (1 - \cos i), \quad \sin i' = \frac{n_{lins}}{n_{luft}} \sin i, \quad l'_m = \frac{y}{\tan(i' - i)} - s$$

Stråle nr	y [cm]	sini	i [rad]	sini'	i' [rad]	s [cm]	l'_m [cm]
Paraxial	-	-	-	-	-	-	12
1	2,0	0,333	0,340	0,500	0,524	0,34	10,4
2	3,5	0,58	0,623	0,875	1,06	1,13	6,3
3	5,0	0,83	0,985	1,25	-	-	-



Avvikelser från paraxial approximation => **Monokromatiska aberrationer**.

(Det finns också kromatiska aberrationer som beror på dispersion i linsmaterialet, se föreläsning 7)

$LA = l' - l'_m = \text{Longitudinell Aberration}$

$TA = \text{Transversell Aberration}$  (OBS! felritad i fig 7.9 och 7.10 i *Optics*)

$$TA \approx LA \frac{y}{l'} \quad (\text{ekv. 7.9 i } Optics)$$

Aberrationen i den planokonvexa linsen ovan kallas Sfärisk aberration.

### Seidel aberrationer

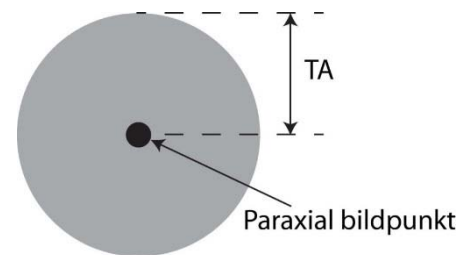
”Tredje ordningens aberrationer”  $\sin i = i - \frac{i^3}{6} + \frac{i^5}{120} - \dots$

De största monokromatiska aberrationerna i linssystem (rotationssymmetriska system).

- Sfärisk aberration
- Koma
- Bildfältskrökning
- Astigmatism (sned/radiell)
- Distorsion

### Sfärisk aberration ( $TA \sim y^3$ )

- Bildavståndet,  $l'$ , varierar med höjden ( $y$ ) som strålen träffar linsen med (Det vanligaste är att randstrålarna bryts för mycket.)
- Enda aberration för objekt på optiska axeln.
- Oberoende av läget i bildplanet (oberoende av bildhöjden  $h'$ )
- Ger en cirkulär halo runt bildpunkterna i paraxialt bildplan
- Växer snabbast med aperturens storlek,  $y$ , av alla Seidel aberrationer ( $TA \sim y^3$ , liten öppning ger mindre suddighet)



Se figuren på föregående sida för strålkonstruktion vid positiv sfärisk aberration.

## Hur räknar man ut den sfäriska aberrationen?

För en sfärisk, tunn lins i luft gäller:

$$LA = l' - l'_m = \frac{1}{2}y^2l'^2F^3(\alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta) \quad (7.21)$$

$$TA \approx \frac{y}{l'} LA \quad (7.9)$$

$LA > 0 \Leftrightarrow$  positiv sfärisk aberration  $\Leftrightarrow F_m > F$  (vanligt för positiva linser)

$LA < 0 \Leftrightarrow$  negativ sfärisk aberration  $\Leftrightarrow F_m < F$  (vanligt för negativa linser)

$l'$  = paraxialt bildavstånd

$l'_m$  = randstrålens bildavstånd

$y$  = randstrålens höjd

$F$  = linsens paraxiala styrka

$F_m$  = linsens styrka för randstrålar

( $h'$  = paraxial bildhöjd)

$$X = \frac{(r_2 + r_1)}{(r_2 - r_1)} = \frac{(R_1 + R_2)}{(R_1 - R_2)} \quad (\text{Formfaktor}) \quad (7.19)$$

$$Y = \frac{l' + l}{l' - l} = \frac{L + L'}{L - L'} \quad (\text{Konjugatfaktor}) \quad (7.20)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  och  $\xi$  är positiva konstanter som minskar med ökande  $n$ :

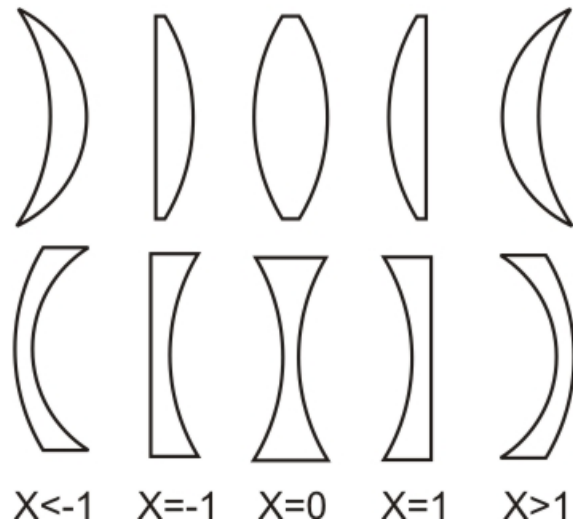
$$\alpha = \frac{n+2}{4n(n-1)^2} \quad \beta = \frac{n+1}{n(n-1)} \quad \gamma = \frac{3n+2}{4n} \quad (7.22)$$

$$\delta = \frac{n^2}{4(n-1)^2} \quad \varepsilon = \frac{n+1}{2n(n-1)} \quad \xi = \frac{2n+1}{2n} \quad (7.50)$$

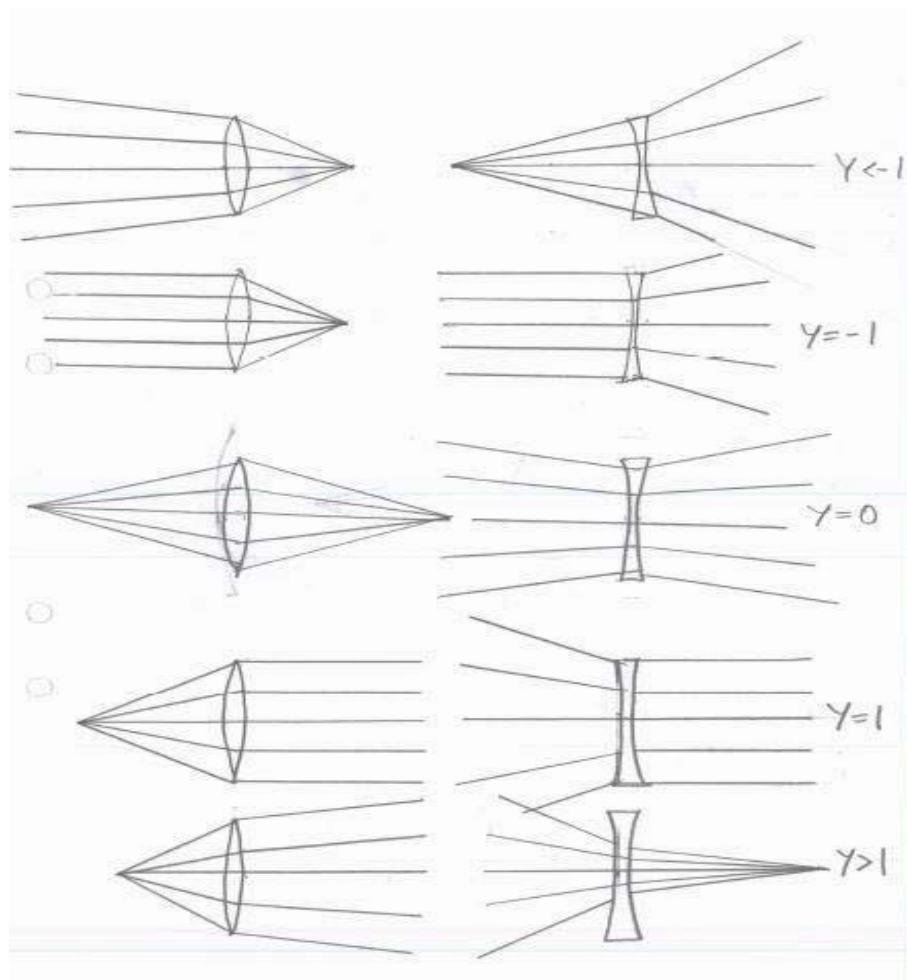
**Tabell 7.1**

n	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\xi$
1,4	3,79	4,28	1,11	3,06	2,14	1,36
1,5	2,33	3,33	1,08	2,25	1,67	1,33
1,6	1,56	2,71	1,06	1,78	1,35	1,31
1,7	1,11	2,27	1,04	1,48	1,13	1,29





**Figur 3:** Formfaktorer



**Figur 4:** Konjugatfaktorer

## Hur kan man minska den sfäriska aberrationen?

- Vänd linsen rätt:  
Dela upp brytningen mellan ytorna genom att vända den mest krökta ytan mot det planaste fältet
- Minsta suddighet =  $TA/4$  fås på avståndet  $\frac{3}{4}LA$  från paraxialt bildplan i riktning mot bilden för randstrålarna. (Bästa bild framför paraxialt bildplan vid positiv sfärisk aberration.)
- Om möjligt minska aperturen:  
Randstrålarna som bryter mest fel tas bort
- Om möjligt välj högre brytningsindex:  
Mindre krökta ytor ger mindre aberrationer
- Om möjligt välj rätt formfaktor:

$$X_{min} = -\frac{2(n^2-1)}{n+2} \cdot Y \quad \Rightarrow$$

$$LA_{min} = \frac{1}{2} y^2 l'^2 F^3 \left( \frac{n^2}{4(n-1)^2} - \frac{n}{4(n+2)} Y^2 \right) \quad (7.24)$$

Objekt:

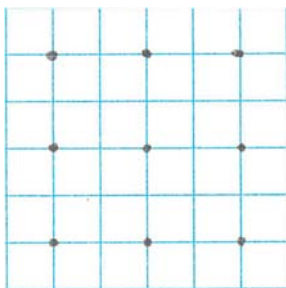
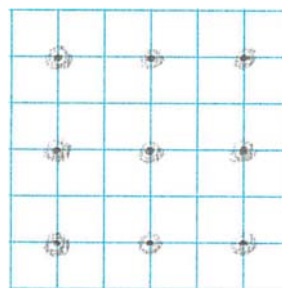
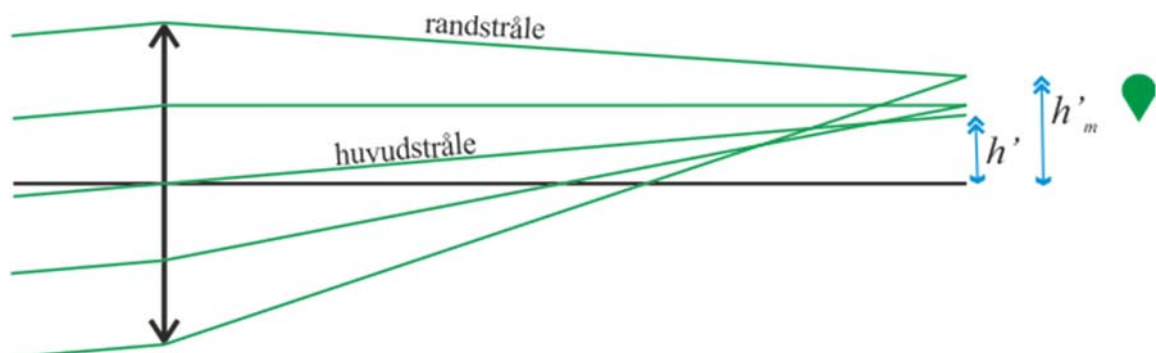


Bild:



Koma ( $TA \sim h'y^2$ )



Figur 5: Koma i tunn lins (negativ koma i detta fall).

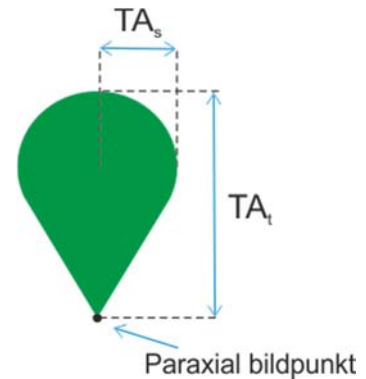
- Förstoringen ( $m$ ) varierar med höjden ( $y$ ) som strålen träffar linsen med (vid positiv koma ger randstrålarna mindre förstoring, vid negativ koma ger de större förstoring)
- Ger kometformade bildpunkter
- Första aberration som dyker upp för objekt utanför optiska axeln ( $TA \sim h'$ )
- Växer näst snabbast med aperturens storlek ( $TA \sim y^2$  liten öppning ger mindre suddighet)

Hur räknar man ut koma?

$$TA_t = h' - h'_m = \frac{3}{2} y^2 h' F^2 (\epsilon X + \xi Y)$$

$$TA_s = \frac{TA_t}{3}$$

$$(\epsilon X + \xi Y) > 0 \Leftrightarrow \text{positiv koma}$$



Med beteckningar och uträkningar på samma sätt som för sfärisk aberration på förra sidan.

### Hur minskar man koma?

- Vänd linsen rätt:  
Dela upp brytningen mellan ytorna
- Om möjligt minska aperturen och välj högre brytningsindex
- Om möjligt välj rätt formfaktor: ingen koma om  $\epsilon X + \xi Y = 0$

Objekt:

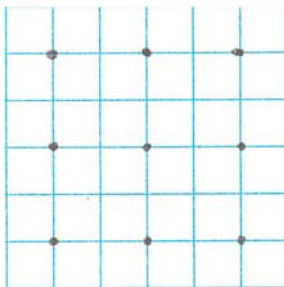


Bild (positiv koma):

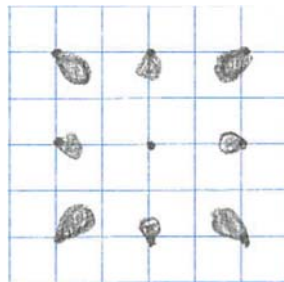


Bild (negativ koma):

