Svar och Lösningsförslag Kontrollskrivning 1 SF1661 Perspektiv på Matematik

Tisdagen 17 september 2013, 13.15 – 14.30

1. a) Bestäm alla reella tal x som uppfyller olikheten $|x+1| \leq 4$. (1p)

b) Bestäm en ekvation för den cirkel i xy-planet som passera igenom punkten med koordinater $(1, -3)$ och som har sin medelpunkt i punkten med kooridnater $(2, -2)$. (2p)

c) Ange koordinaterna för ytterligare två punkter som ligger på den cirkel som du studerade i uppgift b). (1p)

---

a) Olikheten $|x+1| \leq 4$ kan tolkas som att vi söker de x som ligger på ett avstånd mindre än eller lika med 4 ifrån talet (-1). Detta uppfylls av $x \in [-5, 3]$.

b) Eftersom cirkeln har medelpunkt i $(2, -2)$ och passerar genom $(1, -3)$ är cirkelns radie r lika med avståndet mellan dessa punkter,

$$r = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{2}.$$

Cirkelns ekvation ges då av

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2.$$

c) Ytterligare punkter på cirkeln fås genom att välja koordinatpar (x, y) som uppfyller cirkelns ekvation, t ex $(1, -1)$ och $(\sqrt{2}+2, 0)$.

Svar: a) $-5 \leq x \leq 3$ b) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$ c) T ex $(1, -1)$ och $(\sqrt{2}+2, 0)$

---

2. Låt z och w vara de komplexa talen

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{och} \quad w = 16\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

a) Beräkna $\dfrac{w^3}{z^{11}}$. Du kan ange kvoten på polär form. (2p)

b) Markera så tydligt som möjligt i en figur var i det komplexa talplanet talen z, w och $\dfrac{w^3}{z^{11}}$ ligger. (2p)

---

a) Eftersom $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ och $w = 16\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ är

$$z^{11} = 2^{11}\left(\cos\frac{11\pi}{3} + i\sin\frac{11\pi}{3}\right) = 2^{11}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

och

$$w^3 = w = 16^3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{12}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Alltså är

$$\frac{w^3}{z^{11}} = \frac{2^{12}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2^{11}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)} = 2\left(\cos\frac{-11\pi}{12} + i\sin\frac{-11\pi}{12}\right).$$

b) Se läroboken om komplexa tal på polär form.

Svar: a) $\frac{w^3}{z^{11}} = 2\left(\cos\frac{-11\pi}{12} + i\sin\frac{-11\pi}{12}\right)$

---

3. a) Det finns ett berömt, än så länge obevisat, påstående om primtalen som kallas "Goldbachs förmodan" (*The Goldbach conjecture*). Vad säger detta påstående? (1 p)

b) Redogör för beviset av att det finns oändligt många primtal. (3p)

---

a) och b) Se läroboken *What is Mathematics?*
