Lösningsförslag till Kontrollskrivning 2 SF1661 Perspektiv på Matematik
Tisdagen 1 oktober 2013, 14.15 – 15.30

1. a) Använd Pascals triangel för att utveckla uttrycket $(x-1)^6$. (2p)

b) Bestäm koefficienten framför x^{47}-termen i utvecklingen av $(x+1)^{50}$. (2p)

---

a) Med hjälp av Pascals triangel (se *What is mathematics?*) fås

$$\begin{aligned}(x-1)^6 &= x^6 + 6x^5(-1)^1 + 15x^4(-1)^2 + 20x^3(-1)^3 + 15x^2(-1)^4 + 6x^1(-1)^5 + (-1)^6 \\ &= x^6 - 6x + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1.\end{aligned}$$

b)

$$(x+1)^{50} = \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} x^k \cdot 1^{50-k} = \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} x^k.$$

För $k = 47$ fås den term i summan som innehåller x^{47}, koefficienten framför x^{47} är således

$$\binom{50}{47} = \frac{50!}{47!3!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{6} = 50 \cdot 49 \cdot 8 = 400 \cdot 49 = 19600.$$

Svar: a) $(x-1)^6 = x^6 - 6x + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$ b) 19600

---

2. a) Konstruera ett tredjegradspolynom som har nollställen i $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ och $x = -\frac{1}{3}$, och skriv det på formen $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. (2p)

b) Lös ekvationen

$$4^x + \frac{5}{2}2^x = \frac{3}{2}. \quad \text{(2p)}$$

Tips: Substitutionen $t = 2^x$ kan vara till nytta.

---

a) Enligt Faktorsatsen har följande polynom de angivna nollställena,

$$(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3}) = (x-\frac{1}{2})(x^2-\frac{1}{9}) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{18}.$$

b) Om vi sätter $t = 2^x$ är $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$ och den givna ekvationen kan skrivas

$$t^2 + \frac{5}{2}t - \frac{3}{2} = 0 \iff (t+\frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} - \frac{24}{16} = 0 \iff (t+\frac{5}{4}) = \pm\sqrt{\frac{49}{16}},$$

så $t = \frac{1}{2}$ eller $t = -3$, men det senare är inte möjligt eftersom $t = 2^x > 0$ för alla x. Alltså är $t = \frac{1}{2}$ vilket är ekvivalent med att $x = -1$.

Svar: a) T ex $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{18}$ b) $x = -1$

---

3. a) Beräkna summan $S = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} + \dfrac{2}{81} + \dfrac{2}{243}$. (2p)

b) Formulera och härled formeln för en geometrisk serie. (Som alltid i denna typ av uppgifter krävs att du anger nödvändiga villkor och förutsättningar.) (2p)

---

a) $S = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} + \dfrac{2}{81} + \dfrac{2}{243}$. Bilda nu

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \frac{2}{243}\right) = \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \frac{2}{243} + \frac{2}{729}.$$

Vi får då att

$$\frac{2}{3}S = S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3} - \frac{2}{729} \iff S = \frac{3}{2} \cdot 2\left(\frac{243 - 1}{729}\right) = \frac{242}{243}$$

b) Se kurslitteraturen.

Svar: a) $\dfrac{242}{243}$
