

# Föreläsning 6

## Reglerteknik AK

Bo Wahlberg

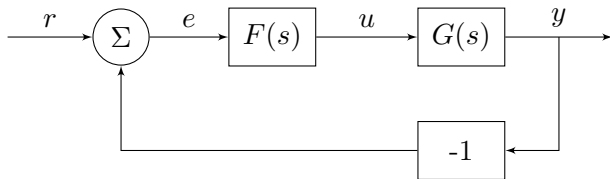
Avdelningen för Reglerteknik  
Skolan för elektro- och systemteknik

22 september 2014



Förra gången:

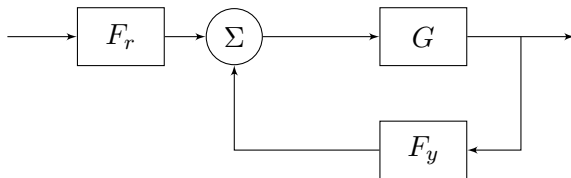
- Regulatorkonstruktion



Målet är att bestämma  $F$  så att  $y \approx r$ .  
Systematisk PID/Lead-lag konstruktion

Dagens program:

- Känslighet och robusthet



Om  $F_r = F_y = F \Rightarrow$  tidigare schema.

Många val av  $F_r$  och  $F_y$  ger samma slutna system.

## Exempel

1. Med  $F_r = F_y = F$  fås

$$\implies G_c = \frac{GF}{1 + GF}$$

2. Med öppen styrning ( $F_y = 0$ ) och  $F_r = \frac{F}{1+GF}$  fås

$$\implies G_c = \frac{GF}{1 + GF}$$

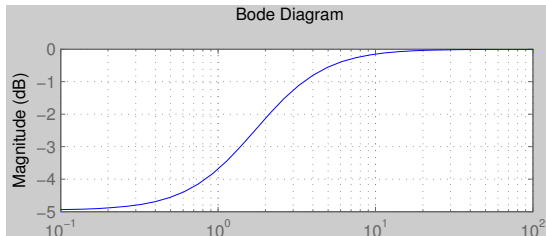
## Fördelar med återkoppling:

- Återkoppling minskar inverkan av störningar

$$Y = \frac{GF_r}{1 + GF_y} R + \underbrace{\frac{1}{1 + GF_y}}_{\text{känslighetsfunktionen}} V$$

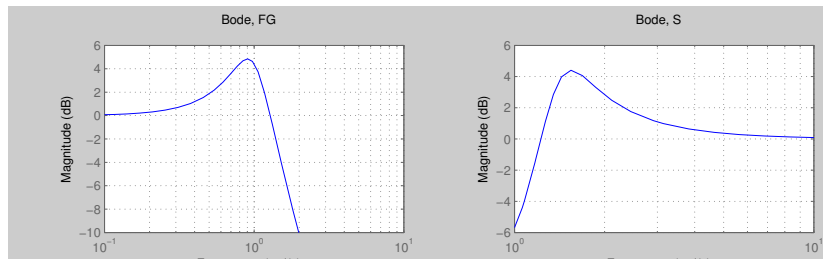
$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)F_y(s)}$$

Vi får liten inverkan av störningar med frekvenser där  $|S(i\omega)|$  är liten.



# Känslighet och robusthet

Om kretsförstärkningen  $|F_y(i\omega)G(i\omega)|$  är stor  $\Rightarrow |S(i\omega)|$  är liten.



## Exempel

$$F_y(s) = K \left[ 1 + \frac{1}{T_I} \frac{1}{s} \right]$$

$$\Rightarrow |S(0)| = 0$$

dvs. PI-reglering eliminerar inverkan av stegstörningar i stationärt tillstånd.

- Återkoppling minskar inverkan av vissa typer av modellfel

**Modell:**  $G(s)$

**Verklighet:**  $G^0(s) = G(s)[1 + \Delta G(s)]$

Vi kan lösa ut  $\Delta G(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)}$  och ser att det är ett *relativt fel*.

Vad händer då man återkopplar det **verkliga** systemet?

Återkopplar vi det **verkliga** systemet får vi:

$$Y^0 = \frac{G^0 F_r}{1 + G^0 F_y} R = \dots = [1 + S^0 \Delta G] Y$$

$$\Rightarrow \Delta Y = \frac{Y^0 - Y}{Y} = S^0 \Delta G$$

där  $S^0(s) = \frac{1}{1 + G^0(s)F_y(s)}$ .

Modellfel,  $\Delta G(i\omega)$ , får liten inverkan om den **verkliga känslighetsfunktionen**  $|S^0(i\omega)|$  är liten.



## Exempel

PI-reglering  $\Rightarrow S^0(0) = 0$

Eliminerar inverkan av felaktig statisk förstärkning,  $G^0(0)$ .

Vid "små" modellfel har vi att

$$S^0 \approx S = \frac{1}{1 + GF}$$

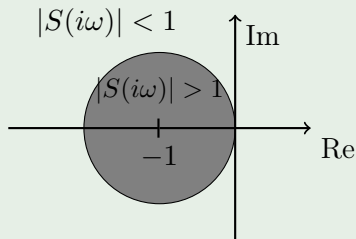
## Exempel

För fallet  $F_y = F_r = F$  fås

$$G_c + S = \underbrace{\frac{GF}{1+GF}}_{\approx 1} + \underbrace{\frac{1}{1+GF}}_{\Rightarrow \approx 0} = 1$$

Bra val!

Nyquistdiagram och  $S(i\omega)$ :



## Nackdelar med återkoppling:

- Hög kretsförstärkning ökar risken för instabilitet, speciellt vid modellfel (robusthet)
- Kräver eventuellt stora styrsignaler.

$$U = -\frac{F_y}{1 + GF_y}V \approx -\frac{1}{G}V$$

om  $GF_y$  är stor.

Krävs en stor styrsignal för att eliminera störningar i frekvensband där  $|G(i\omega)|$  är liten.

- Mätbrus (fel)!

## Sats (Bodes Integral)

Om  $G_0$  har ett relativt gradtal  $\geq 2$  gäller att

$$\int_0^{\infty} \log |S(i\omega)| d\omega = \pi(p_1 + \dots + p_m)$$

där  $p_1, \dots, p_m$  är polerna till  $G_0(s)$  i H.H.P.

Observera att detta är oberoende av regulator.

Beviset bygger på integration av

$$\log S(i\omega) = \underbrace{\log |S(i\omega)|}_{\text{jämn fkn}} + i \underbrace{\arg S(i\omega)}_{\text{udda fkn}}$$

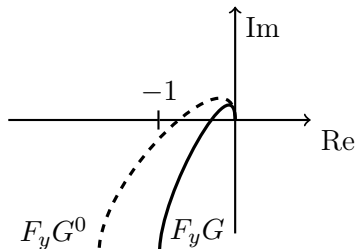
**Modell:**  $G(s)$ , antag stabil

**Verklighet:**  $G^0(s) = G(s)[1 + \Delta_G(s)]$ , antag stabil

Nominellt återkopplat system:  $\frac{GF_r}{1+GF_y}$ , antag stabilt

**Fråga:** Är det verkliga återkopplade systemet stabilt?

För att svara på denna fråga kan vi bland annat använda Nyquistkriteriet.



$$F_y G^0 = F_y G [1 + \Delta_G] = F_y G + F_y G \Delta_G$$

Kravet är att  $F_y G^0$  ej får omsluta -1.

OK om avståndet mellan  $F_y G$  och  $F_y G^0$  är mindre än avståndet mellan  $F_y G$  och -1.

Detta ger kravet att

$$\begin{aligned} |F_y(i\omega)G^0(i\omega) - F_y(i\omega)G(i\omega)| &< |F_y(i\omega)G(i\omega) - (-1)| \\ \Rightarrow |F_y(i\omega)G(i\omega)\Delta_G(i\omega)| &< |F_y(i\omega)G(i\omega) + 1| \end{aligned}$$

Som omformulerat ger det så kallade **Robusthetskriteriet** från 1978

$$\Rightarrow \boxed{\frac{|F_y(i\omega)G(i\omega)|}{|1 + F_y(i\omega)G(i\omega)|} < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \quad \forall \omega}$$

Definera den komplementära känslighetsfunktionen:

$$T(s) = \frac{F_y(s)G(s)}{1 + F_y(s)G(s)} = 1 - S(s)$$

Normalt är  $\Delta_G$  ej känd, men en övre uppskattning är given

$$|\Delta_G(i\omega)| \leq g(\omega) \quad \forall \omega$$

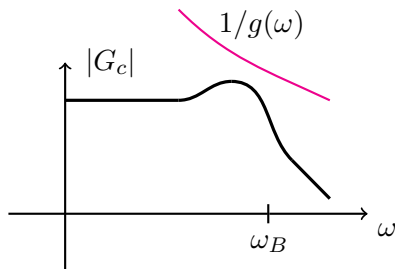
Det verkliga slutna systemet är då stabilt om

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{g(\omega)} \quad \forall \omega$$

Vilket är ett tillräckligt villkor, men ofta ej nödvändigt.



Observera att om  $F_y = F_r = F$  så är  $T = G_c$ .



Begränsar möjlig bandbredd.

## Exempel

Antag att

$$G^0(s) = G(s) \underbrace{\frac{\alpha}{s + \alpha}}_{1 + \Delta_G(s)}$$

Genom identifikation ser vi att

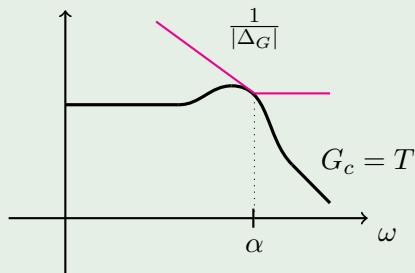
$$\Delta_G(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} - 1 = -\frac{s}{s + \alpha}$$

och

$$\frac{1}{\Delta_G(s)} = -\frac{s + \alpha}{s}$$

har brytpunkter vid 0 (-1) och  $\alpha$  (+1)

## Exempel (fort.)



Desto långsammare försummad dynamik ( $\alpha$ ), desto lägre möjlig bandbredd.

Alternativt: Modellera bättre!