KTH Matematik
Hans Thunberg
SF1661 Perspektiv på matematik

Kompletterande text till *What is mathematics?*, sid 272 -289, om funktionsbegreppet. Moderna beteckningar och svensk terminologi.

Definition 1. En *funktion* $f : S \to T$ är en regel som till varje element $x \in S$ associerar precis ett element $y = f(x) \in T$. Mängden S utgör funktionens *definitionsmängd* och betecknas också D_f. Mängden T kallas för funktionens *målmängd* (den mängd funktionen "siktar på").

Exempel 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = \sin x$ är vår vanliga sinusfunktion. $D_f = \mathbb{R}$ eftersom funktionen är definierad för alla reella tal. Målmängden kan tas som de reella talen, eftersom $\sin x$ är ett reellt tal för varje reellt värde på x.
Vi hade ju också kunnat ha en mindre målmängd, eftersom $\sin x$ bara antar värden i intervallet $[-1, 1]$.

För att komma bort från otydligheten med begreppet målmängd inför vi begeppet *värdemängden* till f, V_f, som är den delmängd av målmängden, $V_f \subset T$, som består av precis de $y \in T$ som "träffas" av något x när f "skjuter iväg" $x \in D_f$ till $f(x) \in T$.

Definition 2. Värdemängden V_f till en funktion $f : S \to T$ är den delmängd av målmängden T som ges av

$$V_f = \{y \in T : y = f(x) \text{ för något } x \in S = D_f\}.$$

För funktionen i Exempel 1 är alltså $V_f = [-1, 1]$.

Att man ändå behåller begreppet målmängd beror bland annat på att det ibland är svårt att precisera precis vilken värdemängden är.

Exempel 2. Låt $S = \{0, 1, 2, 3\}$ och låt $T = \{a, b, c, d\}$. Vi definierar $: S \to T$ genom

$$f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c, f(3) = a.$$

$S = \{0, 1, 2, 3\}$ är då definitionsmängd, $T = \{a, b, c, d\}$ är målmängd och $V_f = \{a, b, c\}$ är värdemängd (elementet $d \neq f(x)$ för alla x i D_f).

Definition 3. En funktion $f : S \to T$ kallas *injektiv* om olika element i definitionsmängden $D_f = S$ avbildas på olika element i värdemängden $V_f \subset T$, det vill säga om

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b), \forall a, b \in D_f.$$

En funktion $f : S \to T$ kallas *surjektiv* (eller "*på*", eng."*onto*") om varje element i målmängden T är bilden av något element i definitionsmängden $D_f = S$, det vill säga om

$$\forall y \in T, \exists x \in S : y = f(x).$$

Med andra ord är en funktion surjektiv precis när $T = V_f$, det vill säga när målmängd och värdemängd sammanfaller.

En funktion som är både injektiv och surjektiv kallas *bijektiv* (”*ett-till-ett* ”, eng. ”*bi-unique* ”, ”*one-to-one*”).

Exempel 3.

- Funktionen i Exempel 2 är inte injektiv ty $f(0) = c = f(3)$. Den är inte heller surjektiv eftersom $f(x) \neq d$ för alla $x \in D_f$.
- Funktionen $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $y = \sin x$ är surjektiv, eftersom varje tal i intervallet $[-1, 1]$ är sinusvärdet för någon vinkel x, men den är inte injektiv eftersom som till exempel $\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4}$.
- Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = h(x) = 2x$, är både
  - injektiv, eftersom om $a \neq b$ så är också $2a \neq 2b$, och
  - surjektiv, eftersom till varje y i målmängden finns ett x i definitionsmängden sådant $y = 2x$, och
  - därmed också bijektiv.

Vi har tidigare i kursen talat om mängders kardinalitet. Vi sa då lite informellt att två mängder har samma kardinatlitet om elementen i mängderna kan paras ihop så att inget element blev över. För ändliga mängder betydde det precis att de hade lika många element. Med de begrepp vi nu har kan vi mer precist formulera definitionen på följande sätt.

Definition 4. Två mängder S och T har samma kardinalitet om det finns en bijektiv funktion $f : S \to T$.

Exempel 4. Den bijektiva funktionen $g : \mathbb{N} \to \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ som ges av $g(n) = 2n$ visar att mängden av de jämna naturliga talen har samma kardinalitet som hela $\mathbb{N}$. På sidan 80 i *What is mathematics* bevisas att de (positiva) rationella talen $\mathbb{Q}_+$ också har samma kardinalitet som $\mathbb{N}$, beviset utgörs, kan vi se nu, av att konstruera en bijektiv funktion mellan mängderna, där varje tal i $\mathbb{Q}_+$ tilldelas precis ett naturligt tal (se figor på sidan 80 i *What is mathematics*).

Inverterbara funktioner och deras inverser

Om vi utgår från en bijektiv funktion $f : S \to T$ är elementen i S och T alltså kopplade parvis med hjälp av funktionen f, till varje $x \in S$ finns precis ett $y \in T$ sådant att $y = f(x)$ (eftersom f är en funktion), men det är också sant att det till varje $y \in T$ finns precis ett $x \in S$ sådant $y = f(x)$, eftersom f är både surjektiv och injektiv.

Exempel 5 Vi modifierar nu funktionen i Exempel 2 till en funktion $g : S = \{0, 1, 2, 3\} \to T = \{a, b, c, d\}$ som är bijektiv,

$$g(0) = a, g(1) = b, g(2) = c, g(3) = d.$$

Vi kan bildligt skriva det som

$$0 \xrightarrow{g} a, 1 \xrightarrow{g} b, 2 \xrightarrow{g} c, 3 \xrightarrow{g} d.$$

Att g är injektiv betyder att inget element i $T = \{a, b, c, d\}$ har mer än en pil som pekar på sig. Att g är surjektiv betyder att varje element i $T = \{a, b, c, d\}$ har minst en pil som pekar på sig. Att g är bijektiv innebär att bägge dessa villkor är uppfyllda, dvs att det pekar precis en pil på varje element i T. Att det utgår precis en pil från varje element i S följer redan av att g är en funktion.

Vi kan nu vända på pilarna och få en ny funktion h som går åt andra hållet, $h : T \to S$.

$$0 \xleftarrow{h} a, 1 \xleftarrow{h} b, 2 \xleftarrow{h} c, 3 \xleftarrow{h} d.$$

Eftersom g var surjektiv blir inget element i T utan pil, det vill säga h är definierad för alla $y \in T$; eftersom g är injektiv startar det precis en pil i varje element i T, så h är en regel som associerar precis ett funktionsvärde till varje element i T. Observera att g och h "tar ut" varandra , till exempel $h(g(1)) = 1$ och $g(h(b) = b$, och motsvarande för övriga par av element.

Definition 5. En funktion $f : S \to T$ kallas *inverterbar* om man kan "vända på pilarna" på detta sätt, mer precist om det finns en funktion $h : T \to S$ sådan att

$$h(f(x) = x, \forall x \in S \quad \text{och} \quad f(h(y) = y, \forall y \in T.$$

h kallas f:s invers, och betecknas vanligen $h = f^{-1}$, och f är då också h:s invers, $f = h^{-1}$.

En funktion är bijektiv om och endast om den är inverterbar. Sambanden mellan en bjektiv funktion $f : S \to T$ och dess invers $f^{-1} : T \to S$ kan också skrivas.

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Exempel 6. Visa att $E(x) = e^x$ och $L(x) = \ln x$ är varandras inverser. Tänk igenom vad det innebär och att det passar in i definitionerna ovan.

Exempel 7. Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = h(x) = 2x$ i Exempel 3, såg vi var bijektiv och därmed inverterbar. Vi kan bestämma dess invers genom att lösa ut $x = \frac{y}{2}$, så $h^{-1}(y) = \frac{y}{2}$.

Genom att byta namn på variablerna kan vi också skriva å $y = h^{-1}(x) = \frac{x}{2}$, det är ofta praktiskt då vi gärna vill tänka på x som den oberoende variabeln.

Exempel 8. Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ är en bijektiv (hur kan vi veta det?) och därmed inverterbar funktion. Dess invers ges av $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.