

Gauss-Jordaneliminering

Reducera följande totalmatris till reducerad trappstegsform med Gauss-Jordaneliminering.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -7 \\ 2 & 3 & 17 & -16 \\ 1 & 2 & 37 & 18 \end{array} \right]$$

Totalmatrisen representerar ett linjärt ekvationssystem. Vad blir lösningen?

När saknar ett system en lösning

Bestäm ett värde på a så att följande system saknar lösningar.

$$\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z &= 3a \end{aligned}$$

Rang

Bestäm ett värde på a så att följande system har en unik lösning. Bestäm systemets lösning för värdet på a .

$$\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z &= 3a \end{aligned}$$

Vilken rang har systemet?

Fria variabler

Bestäm ett värde på a så att följande system har minst en fri variabel samt bestäm systemets lösning(ar).

$$\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z &= 3a \end{aligned}$$

Vilken rang har systemet?

När har en matris en invers?

Betrakta följande system

$$\begin{aligned}x + y + 7z &= -7 \\2x + 3y + 17z &= -16 \\x + 2y + (a^2 + 1)z &= 3a\end{aligned}$$

- (a) Låt $a = 6$. Vilken rang har koefficientmatrisen, A ? Beräkna inversen av A med hjälp av MATLAB, `inv(A)`. Vad blir inversen? Vad blir lösningen?
- (b) Låt $a = -3$. Vilken rang har koefficientmatrisen, A ? Beräkna inversen av A med hjälp av MATLAB, `inv(A)`. Vad blir inversen? Vad blir lösningen?
- (c) Vad gäller för rangen av A för att inversen av A ska existera?

Matris-vektormultiplikation

Om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Visa på två olika sätt att \vec{x} är en lösning till $A\vec{x} = \vec{b}$.

Beräkna även följande matris-vektorprodukter (i de fall det går)

- (a) $\vec{x}A$
- (b) $\vec{x}^T A$
- (c) $\vec{b}^T \vec{b}$
- (d) $\vec{b} \vec{b}^T$

Matris-matrismultiplikation

Betrakta följande matriser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Beräkna följande (i de fall det går)

- AB
- BA
- AC
- CA
- $C^T A$

Baserat på resultaten ovan, hur förhåller sig matriserna A och B ?

Inversen av en matris

Bestäm lösningen, $\vec{x} = (x, y, z)$, till följande system genom att beräkna $A^{-1}\vec{b}$ där A^{-1} är inversen av systemets koefficientmatris och \vec{b} ges av systemets högerled

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= b_1 \\2x + 5y + 3z &= b_2 \\x + 8z &= b_3\end{aligned}$$

där $b_1 = 2$, $b_2 = 9$ och $b_3 = -7$.

Kan systemet ha en lösning för andra värden på högerledet, \vec{b} , än de som är angivna ovan?

LU-faktorisering

Ta fram LU-faktoriseringen av koefficientmatrisen till följande system,

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 2 \\2x + 5y + 3z &= 9 \\x + 8z &= -7\end{aligned}$$

- Hur används faktorerna (matriserna) L och U för att beräkna lösningen, $\vec{x} = (x, y, z)$?
- Bestäm lösningen med hjälp av LU-faktoriseringen

PA=LU-faktorisering

Följande system är givet,

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 2 \\2x + 5y + 3z &= 9 \\x + 8z &= -7\end{aligned}$$

- (a) Gör en PA=LU-faktorisering av koefficientmatrisen i MATLAB genom att skriva $[L,U,P]=lu(A)$.
- (b) Hur ser matrisen P ut?
- (c) Vilka radbyten har gjorts i matrisen A under faktoriseringen? (Kontrollera att du tänkt rätt genom att beräkna $L*U$ och jämför med A .)
- (d) Hur används L , U och P för att bestämma lösningen, $\vec{x} = (x, y, z)$, till systemet?
- (e) Bestäm lösningen med hjälp av faktoriseringen.

Komplexitet

Du löser följande system på din dator

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 2 \\2x + 5y + 3z &= 9 \\x + 8z &= -7\end{aligned}$$

och det tar ca $7 \cdot 10^{-6}$ s. Nu vill du skala upp problemet och istället lösa ett system med 2500 variabler. Hur lång tid kommer det uppskattningsvis att ta?

Du behöver även lösa ett linjärt ekvationssystem med 5000 variabler där koefficientmatrisen är undertriangulär. Hur lång tid tar detta om du använder samma dator som ovan?

Matrisnormer

Bestäm vilken av följande matriser som är störst i max-norm.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Konditionstal

Du ska lösa följande linjära ekvationssystem

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= b_1 \\2x + 5y + 3z &= b_2 \\x + 8z &= b_3\end{aligned}$$

För att få värdena i högerledet måste du utföra mätningar. Dina mätdata är behäftade med relativt fel som är av storleksordningen $5 \cdot 10^{-4}$. Vad kommer den övre gränsen på relativa felet i lösningen bli?