Gauss-Jordan

$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 2 & 3 & 17 & | & -16 \\ 1 & 2 & 37 & | & 18 \end{bmatrix} \qquad \boxed{1}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 1 & 30 & | & 25 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{1/27}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 27 & | & 27 \end{bmatrix} \qquad \boxed{7}\ \boxed{3}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{1}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -14 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

1

När saknar ett system en lösning

$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 2 & 3 & 17 & | & -16 \\ 1 & 2 & a^2+1 & | & 3a \end{bmatrix} \qquad \boxed{1}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 1 & a^2-6 & | & 3a+7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & a^2-9 & | & 3a+9 \end{bmatrix}$$

Om $a^2-9=0$ och $3a+9\neq 0$ finns ingen lösning.

$a^2-9=0$ för $a=\pm 3$

Om $a=3$ så är $a^2-9=0$ och $3a+9=18$

Dvs ingen lösning om $a=3$.

2

Rang

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 2 & 3 & 17 & | & -16 \\ 1 & 2 & a^2+1 & | & 3a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 1 & a^2-6 & | & 3a+7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & a^2-9 & | & 3a+9 \end{bmatrix}$$

En unik lösning $\Leftrightarrow$ systemet har full rang

Om $a=3 \Rightarrow 0=18,$ dvs systemet har ingen lösning

Om $a=-3$ så har vi att $0=0$ i sista raden (fler variabler än ekv)

$\Rightarrow$ systemet har oändligt många lösningar

För unik lösning välj $a \neq \pm 3,$ säg $a=6$

3

Rang

Med $a=6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 2 & 3 & 17 & | & -16 \\ 1 & 2 & 37 & | & 18 \end{bmatrix}$

Systemet blir då samma system som vi löste med Gauss-Jordan (s1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Rang 3

4

Fria variabler

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 2 & 3 & 17 & | & -16 \\ 1 & 2 & a^2+1 & | & 3a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 1 & a^2-6 & | & 3a+7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & a^2-9 & | & 3a+9 \end{bmatrix}$$

Om $a=-3$ så har vi att $0=0$ i sista raden $\Rightarrow$ systemet har oändligt många lösningar

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Systemets rang = antal pivot = 2

5

Fria variabler

Med $a=3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

Lösning ges av

$x+y+7z=-7 \quad \Rightarrow x=-7-y-7z \qquad (1)$

$y+3z=-2 \quad \Rightarrow y=-2-3z \qquad (2)$

Inför en fri variabel s och låt $z=s \qquad (3)$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\quad x=-7-(-2-3s)-7s=-5-4s \\ (2)\quad y=-2-3s \\ (3)\quad z=s \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6

Inversen av en matris

Vill att följande ska vara uppfyllt

$AA^{-1} = I$

Låt $A^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$A\begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix}$

Lös $\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} I & | & \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} I & | & A^{-1} \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c} \boxed{1}\ \boxed{2} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \boxed{-2} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \boxed{-1} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Inversen av en matris, forts

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{-3}\ \boxed{3} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \boxed{2} \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Inversen av en matris, forts

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Det finns en lösning till systemet för alla värden på högerledet. Detta gäller alltid om inversen till *A* existerar.

9

$a = 6 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 2 & 3 & 17 & | & -16 \\ 1 & 2 & 37 & | & 18 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Rang $= 3$

```
>> inv(A)
   2.8519  -0.8519  -0.1481
  -2.1111   1.1111  -0.1111
   0.0370  -0.0370   0.0370
```

$a = -3 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 2 & 3 & 17 & | & -16 \\ 1 & 2 & 10 & | & -9 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & | & -7 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

När har en matris en invers

Rang $= 2$

```
>> inv(A)
Warning: Matrix is singular
to working precision.
   Inf  Inf  Inf
   Inf  Inf  Inf
   Inf  Inf  Inf
```

För att inversen ska existera måste systemet ha full rang

10

Matris-vektormultiplikation

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = b \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ \boxed{2 \quad 5 \quad 3} \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{9} \\ \boxed{-7} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\vec{b} = \vec{x} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

11

Matris-vektormultiplikation, forts

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$\vec{x}A \quad (3\times 1) \quad \times \quad (3\times 3)$ Fungerar ej

$\vec{x}^T A \quad (1\times 3) \quad \times \quad (3\times 3) \quad \Rightarrow \quad (1\times 3) \qquad \vec{x}^T A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 1 \end{bmatrix}$

$\vec{b}^T\vec{b} \quad (1\times 3) \quad \times \quad (3\times 1) \quad \Rightarrow \quad (1\times 1) \qquad \vec{b}^T\vec{b} = 134$

$$\vec{b}\vec{b}^T \quad (3\times 1) \quad \times \quad (1\times 3) \quad \Rightarrow \quad (3\times 3) \qquad \vec{b}\vec{b}^T = \begin{bmatrix} 4 & 18 & -14 \\ 18 & 81 & -63 \\ -14 & -63 & 49 \end{bmatrix}$$

12

Matris-matrismultiplikation

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&2&-3&4\\-5&-5&1&0\\-1&-2&-1&8\end{bmatrix}$$

$$BA=AB=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow B=A^{-1}$$

$$AC\quad (3\times 3)\ \times\ (3\times 4)\ \Rightarrow\ (3\times 4)\qquad AC=\begin{bmatrix}-12&-14&-4&28\\-26&-27&-4&32\\-7&-14&-11&68\end{bmatrix}$$

$CA\quad (3\times 4)\ \times\ (3\times 3)\ \Rightarrow$ Fungerar ej

$$C^TC\quad (4\times 3)\ \times\ (3\times 3)\ \Rightarrow\ (4\times 3)\qquad C^TC=\begin{bmatrix}-10&-23&-20\\-10&-21&-25\\-2&-1&-14\\12&8&76\end{bmatrix}$$

13

LU-faktorisering

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $-$ $-$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$$

$\boxed{-2}$ $-$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&-2&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-3\\0&0&-1\end{bmatrix}=U$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\\boxed{2}&1&0\\\boxed{1}&*&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&\boxed{-2}&1\end{bmatrix}$$

$$L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}}=\vec{b}$$

Lös $L\vec{y}=\vec{b}$ med framåtsubstitution $\Rightarrow \vec{y}$

Lös $U\vec{x}=\vec{y}$ med bakåtsubstitution $\Rightarrow \vec{x}$

14

LU-faktorisering, forts

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 2$$
$$2y_1 + y_2 = 9 \Rightarrow y_2 = 5$$
$$y_1 - 2y_2 + y_3 = -7 \Rightarrow y_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = -1$$
$$x_2 - 3x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

15

PA=LU-faktorisering

```
>> A=[1 2 3;2 5 3;1 0 8]

A =

     1     2     3
     2     5     3
     1     0     8

>> [L,U,P]=lu(A)
```

1

```
L =

    1.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0
    0.5000    0.2000    1.0000

U =

    2.0000    5.0000    3.0000
         0   -2.5000    6.5000
         0         0    0.2000
```

```
P =

     0     1     0        rad 2
     0     0     1        rad 3
     1     0     0        rad 1
```

```
>>PA=L*U

PA =

     2     5     3
     1     0     8
     1     2     3
```

2

```
>> y=L\P*b

y =

    9.0000
  -11.5000
   -0.2000
```

3

```
>> x=U\y

x =

     1
     2
    -1
```

16

Komplexitet

Gauss-Jordan-eliminering full matris $T \approx kn^3$

På den aktuella datorn

$$T = 7 \cdot 10^{-6}\text{s} \text{ och } n = 3 \Rightarrow \quad k = \frac{7 \cdot 10^{-6}}{3^3}$$

Om $n = 2500$ får vi tiden $T \approx \dfrac{7 \cdot 10^{-6}}{3^3} \cdot 2500^3 \approx 4000 \text{ s } = 1.1\,\text{h}$

Framåtsubstitution $T \approx kn^2$

Om $n = 5000$ får vi tiden $T \approx \dfrac{7 \cdot 10^{-6}}{3^3} \cdot 5000^2 \approx 6.5\text{ s}$

17

Matrisnormer

Maxnormen av en matris $\|A\|_\infty := \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le 3} \begin{bmatrix} |1| + |2| + |3| \\ |2| + |5| + |3| \\ |1| + |0| + |8| \end{bmatrix} = \max_{1 \le i \le 3} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix} = 10$$

$$\left\| \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le 3} \begin{bmatrix} |-40| + |16| + |9| \\ |13| + |-5| + |-3| \\ |5| + |-2| + |-1| \end{bmatrix} = \max_{1 \le i \le 3} \begin{bmatrix} 65 \\ 21 \\ 8 \end{bmatrix} = 65$$

18

Konditionstal

$$\underbrace{\frac{\left\|\vec{x}-\vec{x}_A\right\|_\infty}{\left\|\vec{x}\right\|_\infty}}_{\text{Relativa felet in}} \le \operatorname{cond}(A)\underbrace{\frac{\left\|\vec{b}-\vec{b}_A\right\|_\infty}{\left\|\vec{b}\right\|_\infty}}_{\text{Relativa felet ut}}$$

$$\operatorname{cond}(A) = \left\|A\right\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 10\cdot 65 = 650 \quad \text{(s. 17)}$$

Relativa felet in: $\dfrac{\left\|\vec{b}-\vec{b}_A\right\|_\infty}{\left\|\vec{b}\right\|_\infty} = 5\cdot 10^{-4}$

Relativa felet ut: $\dfrac{\left\|\vec{x}-\vec{x}_A\right\|_\infty}{\left\|\vec{x}\right\|_\infty} \le 650\cdot 5\cdot 10^{-4} = 0.325$

19

Parallella beräkningar

20

Algebra-laborationer

- Total 2 st ger 2 hp
- 2 hp motsvarar ca 54 h
- För varje lab
  - 4 h hjälp i labsal
  - 2 h redovisning

  Totalt 12 h (för båda labbarna)
- Eget arbete 54-12=42 h, betyder 21 h/lab
- Redovisning, muntligt
  - Svara på frågor samt redogöra för teorin
  - Visa upp de plottar som efterfrågas
  - Visa upp och köra de program ni har skrivit

21