KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2012-10-16

DEL A

1. Planet H ges av ekvationen $3x + 2y + z = 0$, och planet W ges på parameterform som

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 4s \\ t + 2s \end{bmatrix},$$

där s och t är reella parametrar.

(a) Bestäm en ekvation vars lösningsmängd är W. **(2 p)**

(b) Bestäm en parameterframställning för skärningen av H och W. **(2 p)**

Lösning. a) Vektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ finns i planet, och därför är

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

en normalvektor för planet. Planet går genom origo, och en ekvation för planet är $x + y - 2z = 0$.

b) Skärningen ges som lösningsmängd till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Totalmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2\,3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ kan vi göra Gauss-Jordan elimination påV̇i adderar -3 rad 1 till rad 2. Sedan adderar vi rad 2 till rad 1, och slutligen multipliceras rad 2 med talet -1. Detta ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Det ger linjen $z = t$, $y = 7t$ och $x = -t$, godtyckliga tal t. □

Svar:

(a) Ekvation för planet är $x + y - 2z = 0$.

(b) Linjen är $(-5t, 7t, t)$, godtyckliga tal t.

2. (a) Bestäm en 2×2-matris A sådan att både bildrummet $\operatorname{im}(A)$ och nollrummet $\ker(A)$ är lika med

$$\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

(3 p)

(b) Använd matrisen från del (a) och bestäm nollrummet $\ker(A^2)$. **(1 p)**

Lösning. a) Bildrummet spänns upp av kolonnrummet till matrisen, och därför vill vi välja matrisen

$$A = \begin{bmatrix}2 & 2a\\1 & a\end{bmatrix},$$

för något tal a. Nollrummet skall innehålla vektorn $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, vilket betyder att

$$A \cdot \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+2a\\2+a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Detta betyder att $a = -2$.

b) Vi har att bildrummet till A är lika med nollrummet till A. Detta betyder att allt hamnar i nollrummet till den sammansatta avbildningen A^2. $\square$

Svar:

(a) Matrisen $A = \begin{bmatrix}2 & -4\\1 & -2\end{bmatrix}$.

(b) Hela $\mathbb{R}^2$ är nollrummet.

3. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

och basen $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ som ges av

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att vektorerna $A\vec{u}$, $A\vec{v}$ och $A\vec{w}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. **(3 p)**

(b) Förklara varför $A\vec{u}_1$, $A\vec{u}_2$ och $A\vec{u}_3A$ utgör en bas för varje bas $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ för $\mathbb{R}^3$. **(1 p)**

Lösning. Vi noterar att matrisen A är inverterbar, då

$$\det(A) =| \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 - 8 \neq 0.$$

Vidare har vi att tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ bildar en bas om och endast om de är linjärt oberoende. Låt $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ vara en bas, och låt $\vec{u}' = A\vec{u}$, $\vec{v}' = A\vec{v}$ och $\vec{w}' = A\vec{w}$. Antag nu att vi har en relation

$$a\vec{u}' + b\vec{v}' + c\vec{w}' = 0,$$

med skalärer a, b och c. Vi har att

$$\vec{0} = A^{-1}(a\vec{u}' + b\vec{v}' + c\vec{w}') = aA^{-1}\vec{u}' + bA^{-1}\vec{v}' + cA^{-1}\vec{w}' = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

Vektorerna $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ är linjärt oberoende, vilket medför att $a = b = c = 0$. Och då har vi vist att $\vec{u}', \vec{v}'$ och $\vec{w}'$ också är linjärt oberoende. □

Svar:

(a) -

(b) -

DEL B

4. Bestäm en ekvation för det plan som innehåler både punkten $(1, 2, 0)$ och linjen som ges av följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & 2z & = & -1, \\ -x & - & y & + & z & = & 1. \end{cases}$$

(4 p)

Lösning. Lösningsmängden till ekvationssystemet hittar vid Gauss-Jordan elimination på totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi adderar 2 rad 1 till rad 2. Sedan multiplicerar vi rad 1 med talet -1, och rad 2 med talet $-\frac{1}{3}$. Slutligen adderar vi -1 rad 2 till rad 1. Detta borde ge

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Linjen ges som $z = t$, $y = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}t$ och $x = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}t$. En riktningsvektor för linjen är vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Vi hittar sedan en punkt på linjen, t.ex $P = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$. Lat $A = (1, 2, 0)$. Och vi bildar vektorn $\vec{PA} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$. Vi har nu att vektorn $\vec{v} \times 3\vec{PA}$ är normalvektor till det sökta planet. Vi beräknar att

$$\vec{v} \times \vec{PA} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -15 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

En ekvation för planet är på formen $7x - 5y + 9z = d = 0$, och talet d läser vi av vid insättning av punkten A:

$$7 - 10 + d = 0.$$

□

Svar:

(a) En ekvation för planet är $7x - 5y + 9z + 3 = 0$.

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning så att:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm egenvärden och egenrum till T. **(3 p)**

(b) Avgör om standardmatrisen för T är diagonaliserbar. **(1 p)**

Lösning. a) Låt $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ och $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$. Vi har att $T(\vec{e}_1) = 0 \cdot \vec{e}_1$ och att $T(\vec{e}_2) = \frac{1}{2}\vec{e}2$. Så $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$ är egenvektorer. Vektorn $\vec{e}_3$ är inte en egenvektor. Men, vi ser att $2 \cdot T(\vec{e}_2) = T(\vec{e}_3)$, vilket betyder att

$$2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}$$

är med i nollrummet till T. Nollrummet har därmed dimension två. Egenrum med egenvärde $\lambda = 0$ har bas $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3)$, och egenrum med egenvärde $\lambda = \frac{1}{2}$ har bas $(\vec{e}_2)$. Detta är alla möjliga egenvrum då deras dimension summerar upp till 3.

b) Ja, matrisen är diagonaliserbar. Detta fördi dimensionerna till egenrummet summerar upp till dimensionen av rummet som avbildningen opererar på.

□

Svar:

(a) Egenrum med egenvärde $\lambda = 0$ har bas $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3)$, och egenrum med egenvärde $\lambda = \frac{1}{2}$ har bas $(\vec{e}_2)$.

(b) Ja.

6. Vid sampling av en ljudsignal uppmäts under en kort tidsperiod 1024 mätvärden som sparas som en vektor i $\mathbb{R}^N$, med $N = 1024$. Vid digital ljudbehandling kan sedan denna vektor transformeras i filter. Ett sådant filter ges av

$$y_i = x_i + 2x_{i-1} + x_{i-2}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

där vi för enkelhets skull skriver $x_0 = x_{-1} = 0$ för att hantera fallen $i = 1$ och $i = 2$.

(a) Visa att detta filter svarar mot en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$. **(2 p)**

(b) Visa att avbildningen T är inverterbar. **(2 p)**

Lösning. a) Filteret kan betraktas som den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ som ges av standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Varje vektor i $\mathbb{R}^N$ transformeras i filtret till en ny vektor $\mathbb{R}^N$, och denna transformation tillsvarar multiplikation med matrisen A.

b) Matrisen är inverterbar. Låt A_n vara matrisen ovan med $N = n$. Vi har att determinanten till A_n, utvecklat langsmed den första raden är

$$\det(A_n) = 1 \cdot \det(A_{n-1}) = 1 \cdots 1 \det(A_1) = 1.$$

Determinantent till matrisen A som representerar den linjära avbildningen är alltså 1, och därför är avbildningen inverterbar.

$\square$

Svar:

(a) -

(b) -

DEL C

7. (a) Visa att 1 och -1 är de enda möjliga egenvärdena till ortogonala matriser. **(2 p)**
   (b) Visa att det för varje ortogonal 5×5-matris A måste finnas en nollskild vektor $\vec{v}$ som uppfyller antingen likheten $A\vec{v} = \vec{v}$ eller $A\vec{v} = -\vec{v}$. **(2 p)**

Lösning. a) Kvadratet av längden till en vektor $\vec{x}$ ges som skalärprodukten $\vec{x} \cdot \vec{x}$. Denna produkt kan vi också skrivas som matrisprodukten $\vec{x}^T \cdot \vec{x}$. Om $\vec{x} = A\vec{y}$, för någon matris A, har vi att

$$\vec{x}^T \cdot \vec{x} = (A\vec{y})^T \cdot A\vec{y} = \vec{y}^T A^T \cdot A \cdot \vec{y}.$$

Om matrisen A är orthogonal har vi att $A^T = A^{-1}$, vilket betyder att en orthogonal matris bevarar längd,

$$||\vec{x}|| = ||A\vec{y}||.$$

Om $\vec{y}$ är en egenvektor, med egenvärde λ erhåller vi att

$$||\vec{x}|| = ||A\vec{y}|| = ||\lambda\vec{x}|| = |\lambda|||\vec{x}||.$$

Detta betyder att $\lambda = \pm 1$.

b) Låt A vara en 5×5-matris. Då vill dets karakteristiska polynom $c(A) = \lambda^5 + c_1\lambda^4 + \cdots c_4$ ha grad 5. Varje reelt polynom är en produkt av reella polynom $c(A) = p_1 \cdots p_r$, där p_i antigen har en reell rot $p_i = (\lambda - x)$, eller så är p_i komplexa rötter, och är av grad 2, $p_i = \lambda^2 + a\lambda + b$. Då polynomet $c(A)$ har grad 5, måste en av dessa faktorer p_i ha grad ett, och därför måste det karakteristiska polynomet ha åtminstonde en reell rot. Av uppgiften innan vet vi att de enda reella rötterna är ± 1. Detta betyder också att det måste finnas egenvektorer. Det vill säga, det finns åtminstonde en noll-skilld vektor $\vec{v}$ sådan att

$$A\vec{v} = \vec{v} \quad \text{eller} \quad A\vec{v} = -\vec{v}.$$

$\square$

Svar:

(a) -

(b) -

8. De komplexa talen kan betraktas som vektorer i $\mathbb{R}^2$ genom korrespondensen

$$x + yi \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

(a) Fixera ett komplext tal $z = a + bi$. Visa att multiplikation med talet z svarar mot den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som har standardmatris

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

(2 p)

(b) Förklara varför matrisen är inverterbar om z är nollskilt. **(1 p)**

(c) Bestäm matrisen till den linjära avbildning som svarar mot multiplikation med talet $\frac{1}{4-3i}$. **(1 p)**

Lösning. a) Vi fixerar det komplexa talet $z = a + bi$. Varje komplext tal $w = c + di$ tillsvarar vektorn $\vec{w} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, och specielt har vi identifierad mängden $\mathbb{R}^2$ med det komplexa talplanet. Multiplikationen av komplexa tal är

$$z \cdot w = ac - bd + (cb + ad)i.$$

Vi ser att talet $z \cdot w$ tillsvarar vektorn

$$\vec{zw} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

b) Matrisen A har determinant $a^2 + b^2$, och denna är noll-skild om och endast om $(a, b) \neq (0, 0)$. När determinanten är noll-skild är avbildningen inverterbar.

c) Talet $z = 4 - 3i$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Inversen till denna matris är

$$B = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

vilket svarar till multiplikation med talet

$$\frac{1}{4 - 3i} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25} i.$$

□

Svar:

(a) -

(b) -

(c) -

9. Vi vet att de tre vektorerna $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ ligger i samma plan i $\mathbb{R}^3$. Bestäm vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ om vi vet att

$$|\vec{v}| = 1, \quad |\vec{w}| = 2, \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = 2, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 4$$

och att vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är $\frac{\pi}{3}$. (Vinkeln $0 \leq \alpha \leq \pi$ mellan två noll-skilda vektorer $\vec{x}$ och $\vec{y}$ definieras av sambandet $|\vec{x}||\vec{y}| \cos(\alpha) = \vec{x}\vec{y}$.) **(4 p)**

Lösning. Vi vet att $\vec{v}$ och $\vec{w}$ spänner upp ett plan, och vi har att

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$$

för några skalärer a och b. Vi bestämmer först dessa skalärer. Vi har att

$$2 = \vec{u} \cdot \vec{v} = a|\vec{v}|^2 + b(\vec{w} \cdot \vec{v}) = a + b(\vec{w} \cdot \vec{v})$$

och vi har att

$$4 = \vec{u} \cdot \vec{w} = a(\vec{v} \cdot \vec{w}) + b|\vec{w}|^2 = a(\vec{w} \cdot \vec{v}) + 4b.$$

Vi har vidare att

$$|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos(\frac{\pi}{3}) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Det följer att $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1$. Våra två ekvationer ovan blir nu

$$2 = a + b \quad \text{och} \quad 4 = a + 4b$$

som har lösningen $(a, b) = \frac{1}{3}(4, 2)$. Vi kan nu läsa av längden till vektorn $\vec{u}$,

$$|\vec{u}|^2 = |(\frac{4}{3}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w})|^2 = \frac{16}{9}|\vec{v}|^2 + \frac{16}{9}\vec{v}\vec{w} + \frac{4}{9}|\vec{w}|^2 = \frac{16}{3}.$$

Detta ger att $\cos(\alpha)$, där α är den sökta vinkeln, satisfierar

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Och vi har att vinkeln $\alpha = \pi/6$. □

Svar:

(a) Vinkeln är $\pi/6$.