KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Fredagen den 14 mars, 2014

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. I rummet $\mathbb{R}^3$ har vi punkterna $P = (-3, -1, 4)$ och $Q = (2, 3, 3)$, samt linjen L_1 som ges av vektorerna på formen
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ -2t \end{bmatrix},$$
där t är en reell parameter.
   (a) Bestäm parameterformen för linjen L_2 som går genom P och Q. **(1 p)**
   (b) Linjerna L_1 och L_2 har en gemensam punkt. Bestäm denna skärningspunkt. **(1 p)**
   (c) Bestäm en ekvation för planet H som innehåller L_1 och L_2. **(2 p)**

2. (a) Bestäm ett andragradspolynom $p(x) = a + bx + cx^2$ vars graf $y = p(x)$ går genom punkterna $(-1, 4), (1, 2)$ och $(2, 7)$. **(3 p)**
   (b) Hur många sådana polynom finns det? **(1 p)**

3. Den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ är bestämd av
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Enhetskvadraten Ω har hörn $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ och $(1, 1)$, och avbildas genom T på en parallellogram $T(\Omega)$.
   (a) Bestäm matrisen för avbildningen T. **(1 p)**
   (b) Visa att bildrummet till T är $\mathbb{R}^2$. **(1 p)**
   (c) Rita upp $T(\Omega)$, och bestäm dess area. **(2 p)**

DEL B

4. Följande tre vektorer i $\mathbb{R}^4$,
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$
är ortogonala. Vi låter V vara deras linjära hölje, $V = \mathrm{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.
   (a) Bestäm en ortonormal bas för V. **(1 p)**
   (b) Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ på delrummet V. **(2 p)**
   (c) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars nollrum är V. **(1 p)**

5. Planet W i $\mathbb{R}^3$ är alla vektorer på formen
$$\begin{bmatrix} t \\ 2t - 2s \\ 2t + 2s \end{bmatrix},$$
där s och t är reella tal.
   (a) Beskriv W som lösningmängden till ett system av linjära ekvationer. **(2 p)**
   (b) Bestäm alla vektorer i W som har längden 1 och som är ortogonala mot vektorn **(2 p)**
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. En linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ har egenvärdena $-1, 0, 1$ och 2. Visa att det finns ett plan i $V \subseteq \mathbb{R}^4$ där alla vektorer avbildas på sig själva av T^2. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. I $\mathbb{R}^4$ har vi vektorerna

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har att $\mathcal{B} = \{\vec{e}, \vec{f}\}$ en bas för $V \subseteq \mathbb{R}^4$, och $L\colon V \longrightarrow V$ är en linjär avbildning. Vi vet att med avseende på basen $\mathcal{B}$ så ges avbildningen L av matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm koordinatmatrisen till $\vec{x}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$. **(1 p)**

(b) Bestäm övergångs matrisen (basbyte) från basen $\mathcal{B}$ till basen $\{\vec{x}, \vec{y}\}$. **(2 p)**

(c) Bestäm egenvektorerna för L. **(1 p)**

8. Mittpunkterna på sidorna i en triangel är punkterna $(1, 2, 3)$, $(-2, 3, 1)$ och $(-3, 2, 3)$. Bestäm triangelns hörn. **(4 p)**

9. Låt L vara lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

Bestäm alla delrum av $\mathbb{R}^3$ som innehåller L. **(4 p)**