KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2014-03-14

DEL A

1. I rummet $\mathbb{R}^3$ har vi punkterna $P = (-3, -1, 4)$ och $Q = (2, 3, 3)$, samt linjen L_1 som ges av vektorerna på formen

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ -2t \end{bmatrix},$$

där t är en reell parameter.

(a) Bestäm parameterformen för linjen L_2 som går genom P och Q. **(1 p)**

(b) Linjerna L_1 och L_2 har en gemensam punkt. Bestäm denna skärningspunkt. **(1 p)**

(c) Bestäm en ekvation för planet H som innehåller L_1 och L_2. **(2 p)**

Lösning. (a) Linjen genom P och Q har en riktningsvektor som är parallell med $\overrightarrow{PQ}$ och vi får

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-(-3) \\ 3-(-1) \\ 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom linjen L_2 går genom P kan vi skriva den på parameterform som $\overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$ dvs

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi söker en lösning till ekvationen

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem i de två obekanta s och t och vi kan använda Gausselimination på dess totalmatris och får då

$$\left[\begin{array}{rr|r} \frac{3}{2} & -5 & -3 \\ \frac{1}{2} & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 2r_2 \\ r_1 - 3r_2 \\ r_3 + 4r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Därmed har vi att $s = -2$ och $t = 0$ ger den enda lösningen och skärningspunkten är $(-3, -1, 4)$, dvs punkten P.

(c) Vi kan bestämma en normalvektor till planet som innehåller linjerna med hjälp av vektorprodukten om de inte är parallellla. Vi har

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-4) - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 - 5 \cdot (-4) \\ 5 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 17 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Planets ekvation kan därmed skrivas $15x - 17y + 7z = d$ för någon konstant d och vi kan ta reda på d genom att sätta in en punkt, exempelvis origo som ligger på linjen L, och får då $d = 15 \cdot 0 - 17 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0$. Alltså är planets ekvation $15x - 17y + 7z = 0$. $\square$

Svar:

(a) Linjen L_2 ges av $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(b) Skärningen mellan linjerna är punkten $P = (-3, -1, 4)$.

(c) Planet som innehåller båda linjerna har ekvation $15x - 17y + 7z = 0$.

2. (a) Bestäm ett andragradspolynom $p(x) = a + bx + cx^2$ vars graf $y = p(x)$ går genom punkterna $(-1, 4), (1, 2)$ och $(2, 7)$. **(3 p)**
(b) Hur många sådana polynom finns det? **(1 p)**

Lösning. (a) Eftersom kurvan ska gå genom de tre punkterna måste vi ha att $p(-1) = 4$, $p(1) = 2$ och $p(2) = 7$, dvs

$$\begin{cases} a + b\cdot(-1) + c\cdot(-1)^2 = 4 \\ a + b\cdot 1 + c\cdot 1^2 = 2 \\ a + b\cdot 2 + c\cdot 2^2 = 7 \end{cases}$$

Vi kan använda Gausselimination på totalmatrisen för detta linjära ekvationssystem och får då

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} r_1 + \frac{1}{2}r_2 \\ \frac{1}{2}r_2 \\ r_3 - \frac{3}{2}r_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - \frac{1}{3}r_3 \\ r_2 \\ \frac{1}{3}r_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Alltså kan vi se att koefficienterna $a = 1$, $b = -1$ och $c = 2$ är en lösning till systemet och därmed är det sökta polynomet $p(x) = 1 - x + 2x^2$.

(b) I och med att vi fick en ledande etta i varje kolonn i koefficientmatrisen finns en unik lösning till det linjära ekvationssystemet och därmed finns precis ett andragradspolynom $p(x)$ som uppfyller kraven.

□

Svar:
(a) Polynomet $p(x) = 1 - x + 2x^2$ uppfyller kraven
(b) Det finns bara ett sådant polynom.

3. Den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ är bestämd av

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Enhetskvadraten Ω har hörn $(0,0), (1,0), (0,1)$ och $(1,1)$, och avbildas genom T på en parallellogram $T(\Omega)$.

(a) Bestäm matrisen för avbildningen T. **(1 p)**
(b) Visa att bildrummet till T är $\mathbb{R}^2$. **(1 p)**
(c) Rita upp $T(\Omega)$, och bestäm dess area. **(2 p)**

Lösning. (a) Om A är standardmatrisen för T har vi enligt villkoren att

$$A\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

vilket innebär att A är inversmatris till matrisen $B = \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -4\end{bmatrix}$. Vi kan bestämma den genom exempelvis Gauss-Jordanelimination och får då

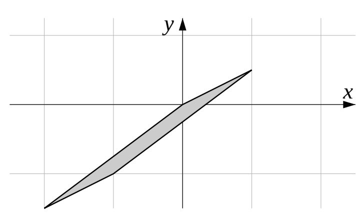
$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\3 & -4 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \begin{bmatrix}r_1\\r_2-3r_1\end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -2 & 1 & 0\\0 & 2 & -3 & 1\end{array}\right] \sim \begin{bmatrix}r_1+r_2\\\frac{1}{2}r_2\end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right]$$

Alltså ges standardmatrisen för T av

$$A = \begin{bmatrix}-2 & 1\\-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix}.$$

(b) Eftersom de båda standardbasvektorerna ligger i bildrummet till T måste bildrummet vara hela $\mathbb{R}^2$.

(c) De båda kolonnvektorerna i A bildar sidor i parallellogrammen $T(\Omega)$ som har sitt fjärde hörn i $T(1,1) = (-1,-1)$. Parallellogrammens area ges av beloppet av deter-



FIGUR 1. Området $T(\Omega)$

minanten av matrisen A, dvs av $\left|-2 \cdot \frac{1}{2} - (-\frac{3}{2}) \cdot 1\right| = \left|-1 + \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$ $\square$

Svar:

(a) Standardmatrisen för T är $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(b) Se ovan.

(c) Arean är $1/2$ areaenhet.

DEL B

4. Följande tre vektorer i $\mathbb{R}^4$,
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$
är ortogonala. Vi låter V vara deras linjära hölje, $V = \operatorname{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.
(a) Bestäm en ortonormal bas för V. **(1 p)**
(b) Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ på delrummet V. **(2 p)**
(c) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars nollrum är V. **(1 p)**

Lösning. (a) En ortonormal bas består av ortogonala vektorer av längden 1. För att $\vec{u}$, $\vec{v}$, och $\vec{w}$ är redan ortogonala. Därmed bildar vektorerna $\frac{1}{||1\vec{u}||}\vec{u}$, $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, och $\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$ en ortonormal bas till V.
$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \end{aligned}$$
Alltså kan vi konstatera att följande vektorer bildar en ortonormal bas till V:
$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1\sqrt{6} \\ 0 \\ -2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$
(b) Låt $\vec{z}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^4$. Betrakta följande vektor:
$$\vec{t} = \frac{\vec{z}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} + \frac{\vec{z}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} + \frac{\vec{z}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w}$$
Observera att $\vec{t}$ ligger i V och att $(\vec{t}-\vec{z})\cdot\vec{u} = (\vec{t}-\vec{z})\cdot\vec{v} = (\vec{t}-\vec{z})\cdot\vec{w} = 0$. Vi kan konstatera att $\operatorname{proj}_V(\vec{z}) = \vec{t}$. Låt $\vec{z} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}\right)$. Vi har följande likheter:
$$\begin{aligned} &\vec{z}\cdot\vec{u} = -2+8 = 6, && \vec{u}\cdot\vec{u} = 3, \\ &\vec{z}\cdot\vec{v} = 2+1 = 3, && \vec{v}\cdot\vec{v} = 3, \\ &\vec{z}\cdot\vec{w} = -2-16 = -18, && \vec{w}\cdot\vec{w} = 6. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\text{proj}_V(\vec{z}) = \vec{t} = \frac{\vec{z}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} + \frac{\vec{z}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} + \frac{\vec{z}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w}$$

$$= \frac{6}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{3}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{-18}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\0\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3\\-3\\0\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-2\\1\\8\end{bmatrix}$$

(c) Kravet på avbildningen T är att matrisens radrum ska vara det ortogonala komplementet till V. Därför börjar vi med att hitta det ortogonala komplementet till V, dvs alla vektorer som är ortogonala mot hela V.
Det ortogonala komplementet består av lösningarna $\vec{x}$ till systemet $\vec{x}\cdot\vec{u} = \vec{x}\cdot\vec{v} = \vec{x}\cdot\vec{w} = 0$, dvs

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Genom Gausselimination får vi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Alltså är $x_4 = 0$, $x_3 = t$ för en parameter t. Den andra ekvationen $-2x_2 + x_3 - x_4 = 0$, ger att $x_2 = \frac{x_3 - x_4}{2} = \frac{t}{2}$ och den första ekvationen ger $x_1 = -x_2 - x_4 = -\frac{t}{2}$.
Alltså är det ortogonala komplemenetet

$$V^\perp = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Det betyder att nollrummet till följande matris är lika med V

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

och att funktionen $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, som ges av denna matris, har V som nollrum, $\ker(T) = V$.

$$T\left(\begin{bmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-t_1 + t_2 + 2t_3\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

□

Svar:

(a) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1\sqrt{6} \\ 0 \\ -2\sqrt{6} \end{bmatrix}$

(b) $\mathrm{proj}_V \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

(c) $T \left(\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -t_1 + t_2 + 2t_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. Planet W i $\mathbb{R}^3$ är alla vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} t \\ 2t-2s \\ 2t+2s \end{bmatrix},$$

där s och t är reella tal.

(a) Beskriv W som lösningmängden till ett system av linjära ekvationer. **(2 p)**

(b) Bestäm alla vektorer i W som har längden 1 och som är ortogonala mot vektorn **(2 p)**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning. (a) Alla vektorer i W kan skrivas som

$$t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vilket betyder att W är ett plan i $\mathbb{R}^3$ och att

$$W = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

För att beskriva planet med hjälp av ett ekvationssystem behövs bara en ekvation och vi kan hitta en normalvektor till planet genom vektorproduktnen.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vektorn $\vec{v}$ är ortogonal till båda $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ som betyder att $\vec{v}$ är normal vektor till W. Alltså ges W av ekvationen $8x - 2y - 2z = 0$.

(b) Vi ombeds att bestämma alla vektorer $\vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ så att:

- $||\vec{w}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$,
- $\vec{w}$ ligger i W, som betyder att $x = t$, $y = 2t - 2s$ och $z = 2t + 2s$, där s och t är reella tal.
- $\vec{w}$ är ortogonal till $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som ges $x + y + z = 0$.

Ekvationen $x+y+z=0$ ger $t+(2t-2s)+(2t+2s)=0$, dvs $5t=0$. Alltså har vi att $t=0$. När vi sätter in detta i ekvationen $x^2+y^2+z^2=1$ får vi $0^2+4s^2+4s^2=1$, och därmed $s=\pm 1/\sqrt{8}$. Det betyder att följande två vektorer uppfyller kraven:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{8} \\ 2\sqrt{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{8} \\ -2/\sqrt{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(a) $8x-2y-2z=0$

(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

6. En linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ har egenvärdena $-1, 0, 1$ och 2. Visa att det finns ett plan i $V \subseteq \mathbb{R}^4$ där alla vektorer avbildas på sig själva av T^2. **(4 p)**

Lösning. Låt $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, och $\vec{v}_4$ vara egenvektoerna till T som motsvarar egenvärderna -1, 0, 1 och 2. För egenvärderna är olika, vektorerna $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, och $\vec{v}_4$ är linjärt oberoende.

Observera att:

$$T^2(\vec{v}_1) = T(T(\vec{v}_1)) = T(-\vec{v}_1) = -T(\vec{v}_1) = -(-\vec{v}_1) = \vec{v}_1$$
$$T^2(\vec{v}_3) = T(T(\vec{v}_3)) = T(\vec{v}_3) = \vec{v}_3$$

Alltså, alla vektorer $\vec{v} = t\vec{v}_1 + s\vec{v}_3$ i planet Span$(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$ avbildas genom T^2 på sig själva:

$$T^2(t\vec{v}_1 + s\vec{v}_3) = tT^2(\vec{v}_1) + sT^2(\vec{v}_3) = t\vec{v}_1 + s\vec{v}_3$$

□

Svar: Vektorerna i planet som spänns av egenvektorer till T med egenvärden 1 och -1 avbildas på sig själva av T^2.

DEL C

7. I $\mathbb{R}^4$ har vi vektorerna

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har att $\mathcal{B} = \{\vec{e}, \vec{f}\}$ en bas för $V \subseteq \mathbb{R}^4$, och $L\colon V \longrightarrow V$ är en linjär avbildning. Vi vet att med avseende på basen $\mathcal{B}$ så ges avbildningen L av matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm koordinatmatrisen till $\vec{x}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$. **(1 p)**
(b) Bestäm övergångs matrisen (basbyte) från basen $\mathcal{B}$ till basen $\{\vec{x}, \vec{y}\}$. **(2 p)**
(c) Bestäm egenvektorerna för L. **(1 p)**

Lösning. a) Vi vill bestämma skalärer a och b sådana att $\vec{x} = a\vec{e} + b\vec{f}$. Detta ger ett ekvationssystem i två okända, men med fyra ekvationer. Vi vet att lösningen är unik, och bryr oss därmed om bara två av dessa ekvationer. De två sista koordinaterna ger ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi löser denna ekvation genom att multiplicera med inversen $\frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, vilket ger

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Koordinatmatrisen för $\vec{x}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$ blir därmed

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

b) För att bestämma basbytesmatrisen från basen $\mathcal{B}$ till basen $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ måste vi uttrycka $\vec{e}$ och $\vec{f}$ i den andra basen. Vi noterar att vektorn $\vec{y}$ har en nolla i tredje koordinat. Ekvationen $\vec{e} = a\vec{x} + b\vec{y}$ har därmed lösningen $a = 1$, och det följer därmed att $b = 4$. På samma sätt läser vi av att $\vec{f} = 2\vec{x} + 3\vec{y}$. Den sökta övergångsmatrisen är

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Med avseende på basen $\mathcal{B}$ ges den linjära avbildningen av en diagonal matris. Detta betyder att baserna $\vec{e}$ och $\vec{f}$ är egenvektorer. De sökta egenvektorerna är

$$\begin{bmatrix} 5t \\ 9t \\ 2t \\ 5t \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 5s \\ 8s \\ 4s \\ 5s \end{bmatrix}$$

med nollskilda tal s och t. □

Svar:

(a) Koordinatmatris $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) Övergångsmatris $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(c) Egenvektorer är $t\vec{e}$ och $s\vec{f}$, nollskillda skalärer.

(d) Mittpunkterna på sidorna i en triangel är punkterna $(1,2,3)$, $(-2,3,1)$ och $(-3,2,3)$. Bestäm triangelns hörn. **(4 p)**

Lösning. Låt $P = (1,2,3)$, $Q = (-2,3,1)$ och $E = (-3,2,3)$ vara de givna mittpunkterna. Om A, B och C är triangelns hörn får vi att

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{OQ} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{OR} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

Om vi lägger ihop dessa ekvationer får vi

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu få fram hörnen genom att $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2 \cdot \overrightarrow{OQ}$, etc. Därmed får vi

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$\overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså är triangelns hörn $A = (0,1,5)$, $B = (2,3,1)$ och $C = (-6,3,1)$. □

Svar: Triangelns hörn är $A = (0,1,5)$, $B = (2,3,1)$ och $C = (-6,3,1)$.

(e) Låt L vara lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

Bestäm alla delrum av $\mathbb{R}^3$ som innehåller L. **(4 p)**

Lösning. Hela $\mathbb{R}^3$ är ett delrum som innehåller L. De två ekvationerna beskriver två plan som inte är parallella. Alltså skär de varandra i en linje. Eftersom inget av planen går genom origo kan inte heller skärningen gå genom origo. Om delrummet inte är hela $\mathbb{R}^3$ kommer det därmed att behöva vara tvådimensionellt och ges av en enda ekvation. Denna ekvation behöver vara en linjärkombination av de bägge givna ekvationerna och eftersom origo ligger i delrummet måste konstanttermen vara noll. Alltså måste ekvationen ges av den andra ekvationen minus två gånger den första, dvs av $-3x + 5y - z = 0$.

Ett alternativ är att se att ett delrum som innehåller två punkter på linjen måste innehålla hela linjen. Gausselimination på totalmatrisen ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 - 2r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + \frac{1}{4}r_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

och med parametern t får vi $z = t$, $y = 3/4 - t/4$ och $x = 5/4 - 3t/4$. Därmed ligger punkterna $(5/4, 3/4, 0)$ och $(1/2, 1/2, 1)$ på linjen. Eftersom delrummet är slutet under multiplikation med skalär måste även punkterna $(5, 3, 0)$ och $(1, 1, 2)$ ligga i delrummet. Vi kan få en normalvektor till delrummet med hjälp av vektorprodukten, dvs

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

och vi får återigen en ekvation för planet som $3x - 5y + z = 0$. □

Svar: Det finns två sådana delrum; hela $\mathbb{R}^3$ och delrummet som ges av ekvationen $-3x + 5y - z = 0$.