KTH Teknikvetenskap

# SF1661 Perspektiv på matematik
# Tentamen 23 oktoberi 2014 kl 13.00 – 18.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som var och en ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4 – 6 utgör del II. De tre sista uppgifterna utgör del III. För betygen A och B krävs ett visst antal poäng på del III.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

| Betyg | A | B | C | D | E | Fx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Total poäng | 27 | 24 | 21 | 18 | 16 | 15 |
| varav från del III | 6 | 3 | - | - | - | - |

Dessa poänggränser är preliminära och kan komma att justeras.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

## Del I

(1) Du får veta att $r$ är ett rationellt tal, $r \neq 0$, och att $x$ och $y$ är reella tal, och att $rx = y$. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna och vilka som är falska. Som alltid ska du motivera dina svar.

(P1) $y = 0 \implies x = 0$
(P2) $x = 0 \iff y = 0$
(P3) $y \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{Q}$
(P4) $y \notin \mathbb{Q} \implies x \notin \mathbb{Q}$

(2) Beräkna summorna

$$\sum_{k=1}^{8} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{8} \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

(3) Skissera i det komplexa talplanet mängden av de $z$ som uppfyller ekvationen $|z - (3 - i)| = 2$.
Sätt sedan $x = \operatorname{Re} z$ och $y = \operatorname{Im} z$, och bestäm en ekvation i $x$ och $y$ som beskriver samma mängd.

---

## Del II

(4) Primfaktorisera talen 1155 och 1650, du kan ha hjälp av att $11|1155$ och att $11|1650$. Beräkna sedan med hjälp av primfaktoriseringen

$$\text{a)}\ \frac{3}{1650} - \frac{2}{1155} \quad (2\text{ p}) \qquad \text{b)}\ \frac{\frac{1}{1155}}{\frac{1}{1650}} \quad (2\text{ p})$$

Svaren skall som vanligt anges på så enkel form som möjligt.

(5) Lös ekvationerna

a) $\ln(x^2 - x) - \ln(x - 1) = -1$ (2 p)  b) $\sin 4x = \cos 2x$ (2 p)

*Var god vänd!*

(6) a) Faktorisera polynomet $p(z) = z^3 - 1$ så långt som möjligt i polynom med reella koefficienter. (1 p)

b) Faktorisera polynomet $p(z) = z^3 - 1$ så långt som möjligt i polynom med komplexa koefficienter. (1 p)

c) Finns det något polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

sådant att $p(m) = 0$ för varje heltal $m$ sådant att $0 \leq m \leq n$? Ge ett exempel eller förklara varför något sådant polynom inte finns. (2 p)

---

## Del III

(7) Låt $f(x) = 2\cos x$. Bestäm det största intervall innehållande punkten $x = 1/2$ på vilket $f$ är inverterbar. Ange sedan definitionsmängd och värdemängd för den inverterbara funktionen och för dess invers. Skissera också grafen till inversfunktionen.

(8) Alla reella tal kan som bekant skrivas som decimaltal, om vi tillåter oändligt många decimaler.

Vad kännetecknar de rationella talens decimalbråksutvecklingar?

Finns det några andra tal som har samma kännetecken?

Du behöver inte bevisa dina påståenden med generella bevis, men du ska förklara och motivera dina svar, och argumentera utifrån lämpliga exempel.

(9) Bestäm alla reella tal $x$ sådana att

$$\left| \frac{1}{x+1} - 1 \right| > 3.$$

---