Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

SF1661 PERSPEKTIV PÅ MATEMATIK
TENTAMEN 23/10 2014
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

---

1. Givet är att

$r \in \mathbb{Q},\ r \neq 0,\ x, y \in \mathbb{R}$ samt $y = rx$.

- (P1) $y = 0 \Rightarrow x = 0$ är <u>SANT</u>, ty

  $y = rx \underset{r \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{y}{r}$, så $y = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{r} = 0$

- (P2) $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ är <u>SANT</u>, ty

  – $y = 0 \Rightarrow x = 0$ enligt (P1)

  – Om $x = 0$ är $y = r \cdot 0 = 0$
  så även $x = 0 \Rightarrow y = 0$

- (P3) $y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ är SANT, ty:

  det är givet att $r \in \mathbb{Q}$, dvs $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$

  $y \in \mathbb{Q}$ innebär att $y = \frac{r}{s}$, $r, s \in \mathbb{Z}$.

  Eftersom $x = \frac{r}{y}$ innebär $y \in \mathbb{Q}$ att

  $$x = \frac{m/n}{r/s} = \frac{m \cdot s}{n \cdot r} \in \mathbb{Q}$$

- (P4) $y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$ är SANT

V.G. VÄND

KTH VETENSKAP OCH KONST

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

Vi visar det ekvivalenta påståendet

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \in \mathbb{Q}$.

Så antag att $x \in \mathbb{Q}$, dvs att $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Då är $y = rx = \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{am}{bn} \in \mathbb{Q}$.

<u>SVAR:</u> Alla <u>fyra</u> påståendena är <u>SANNA</u>

KTH VETENSKAP OCH KONST

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

(2.) Summan $S = \sum_{k=1}^{8} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^8}\right)$

är geometrisk med kvot $= \left(-\frac{1}{2}\right)$.

Vi beräknar $S - \left(-\frac{1}{2}\right)S$ genom ledvis subtraktion

$$S = \left(-\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \dots - \cancel{\frac{1}{2^7}} + \cancel{\frac{1}{2^8}}\right)$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)S = \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{16}} - \quad + \cancel{\frac{1}{2^8}} - \frac{1}{2^9}\right)$$

$$S + \frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^9} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2}S = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \Leftrightarrow S = -\frac{1}{3}\left(\frac{2^8-1}{2^8}\right) \Leftrightarrow$$

$$S = -\frac{257}{3 \cdot 258} = -\frac{257}{774}$$

Vi beräknar nu

$$\sum_{k=1}^{8}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{8} 1 + \sum_{k=1}^{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^k =$$

$$= 8 - \frac{257}{774} = \frac{8 \cdot 774 - 257}{774} = \frac{5945}{774}$$

$$\begin{array}{r} 774 \\ \cdot\ 8 \\ \hline 6192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6192 \\ -\ 257 \\ \hline 5945 \end{array}$$

Svar: $\sum_{k=1}^{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{2^8-1}{3 \cdot 2^8} = -\frac{257}{774}$

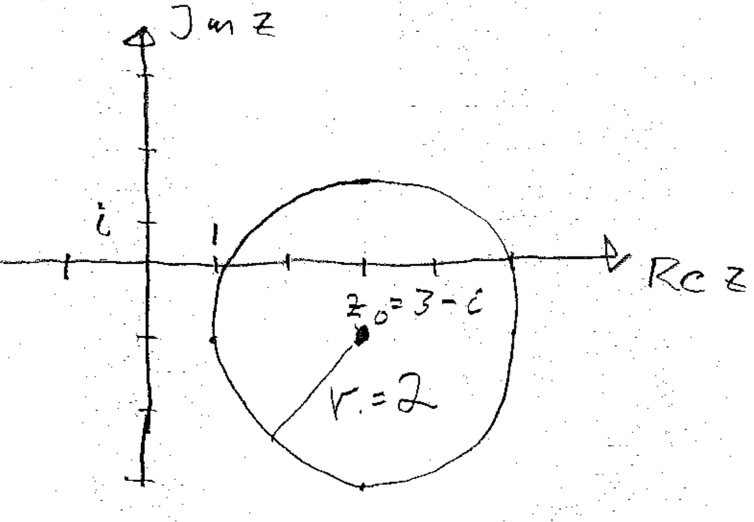
$$\sum_{k=1}^{8}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right) = \frac{5945}{774}$$

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

(3.) Enligt avståndstolkningen av (komplexa) absolutbeloppet, utgörs lösningsmängden till ekvationen

$$|z-(3-i)|=2 \quad (*)$$

av en cirkel i komplexa talplanet, med radie = 2 och medelpunkt i $z_0 = 3-i$.



Låt nu $x = \text{Re}\, z$, $y = \text{Jm}\, z$.

Ekvationen (*) kan då skrivas

$$|(x+iy)-(3-i)|=2$$

$$\Leftrightarrow |(x-3)+i(y+1)|=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=4$$

SVAR:
- En cirkel med radie = 2 och medelpunkt (3−i)
- $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

KTH VETENSKAP OCH KONST

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

4.

$$1155 = 11 \cdot 105 = 11 \cdot 5 \cdot 21 = 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11$$

$$1650 = 10 \cdot 165 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$$

a) $$\frac{3}{1650} - \frac{2}{1155} = \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11} \cdot \frac{7}{7} - \frac{2}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11} \cdot \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 5}$$

$$= \frac{21}{11550} - \frac{20}{11550} = \frac{1}{11550}$$

b) $$\frac{\frac{1}{1155}}{\frac{1}{1650}} = \frac{1650}{1155} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 5^{\cancel{2}} \cdot \cancel{11}}{\cancel{3} \cdot 7 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{11}} = \frac{10}{7}$$

Svar:

a) $\frac{1}{11550}$

b) $\frac{10}{7}$

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

5. a) $\ln(x^2-x)-\ln(x-1)=-1$

Vänsterled är definierat då

$(x-1)>0 \iff x>1$

och $(x^2-x)>0 \iff x(x-1)>0 \iff x<0$ eller $x>1$

Alltså hela V.L. definierat för $x>1$, så för $x>1$ kan vi använda logaritmlagarna och vi får

$\ln(x^2-x)-\ln(x-1)=-1$

$\iff \ln\frac{x^2-x}{x-1}=-1$

$\iff \ln\frac{x(x-1)}{(x-1)}=-1$

$\iff \ln x=-1$

$\iff x=e^{-1}$

Men $e^{-1}<1$ (V.L. ej def då)

Så lösning saknas.

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

5 b) $\sin 4x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin 2x \cos 2x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = 0$ eller $2\sin 2x = 1$

$\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$

$2\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2x = \begin{cases} \pi/6 + n \cdot 2\pi \\ 5\pi/6 + n \cdot 2\pi \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$

eller

$x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$

$n \in \mathbb{Z}$

Svar: Lösningarna ges av

- $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, \; n \in \mathbb{Z},$

och

- $x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi, \; n \in \mathbb{Z}$

och

- $x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi, \; n \in \mathbb{Z}$

KTH VETENSKAP OCH KONST

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

6 a) $p(z) = z^3 - 1$ har nollställe $z = 1$, så $(z-1) \mid z^3 - 1$. Polynomdivision ger

$$
\begin{array}{r}
z^2 + z + 1 \\
z - 1 \,\big)\, z^3 - 1 \\
-(z^3 - z^2) \\
\hline
z^2 - 1 \\
-(z^2 - z) \\
\hline
z - 1 \\
-(z - 1) \\
\hline
0
\end{array}
$$

Så $p(z) = (z-1)(z^2+z+1)$.

Eftersom $z^2 + z + 1 =$

$= \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$

finns inga ytterligare reella nollställen och därför inga fler reella faktorer.

b) Enligt a) är

$p(z) = (z+1)(z^2 + z + 1)$

$z^2 + z + 1 = 0$ ger de komplexa nollställena

$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Motsvarande faktorer är

$\left(z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

och

$\left(z - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

SVAR: a) $p(z) = (z-1)(z^2+z+1)$

b) $p(z) = (z-1)\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

6c) Om $a_i = 0$ förvalla $0 \le i \le n$
fås nollpolynomet $p(x) \equiv 0$ förallax.
Speciellt är $p(m) = 0$ för alla
heltal $0 \le m \le n$.

Om $a_i \neq 0$ för något $0 \le i \le n$
fås ett polynom av gradtal $= g$
där $1 \le g \le n$.

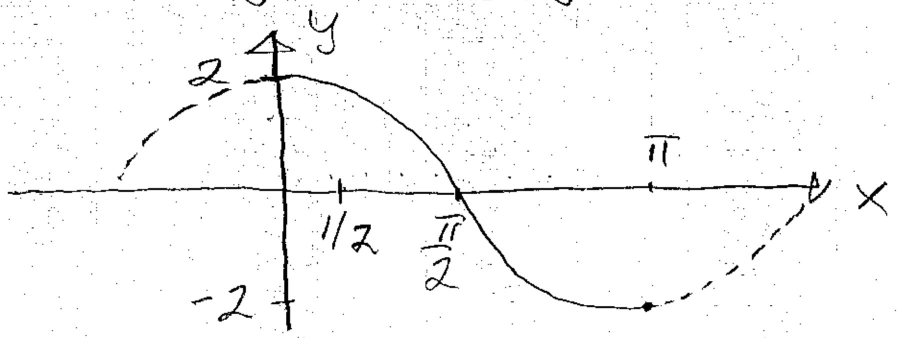
Då gäller faktorsatsen och
varje nollställe $p(m)$, $0 \le m \le n$
svarar mot en faktor $(x-m) \mid p(x)$.

Då skulle $p(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)q(x)$
där $q(x)$ är en konstant $\neq 0$ eller
ett polynom av gradtal ≥ 1
Eftersom $x(x-1)\ldots(x-n)$ är
ett polynom av gradtal $= n+1$
skulle då $p(x)$ ha gradtal $\geq n+1$
vilket är en motsägelse.

SVAR: Nollpolynomet $p(x) \equiv 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
är det enda sådant polynom.
Om vi antar $p(x) \not\equiv 0$ finns inget sådant polynom

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

7 Av grafen $y = 2\cos x$



ser vi att det största intervall innehållande $x = 1/2$ på vilket f är bijektiv är intervallet $[0, \pi]$.

Låt f^{-1} vara inversen till

$$f : D_f = [0, \pi] \to V_f = [-2, 2], \quad f(x) = 2\cos x.$$

Då gäller att

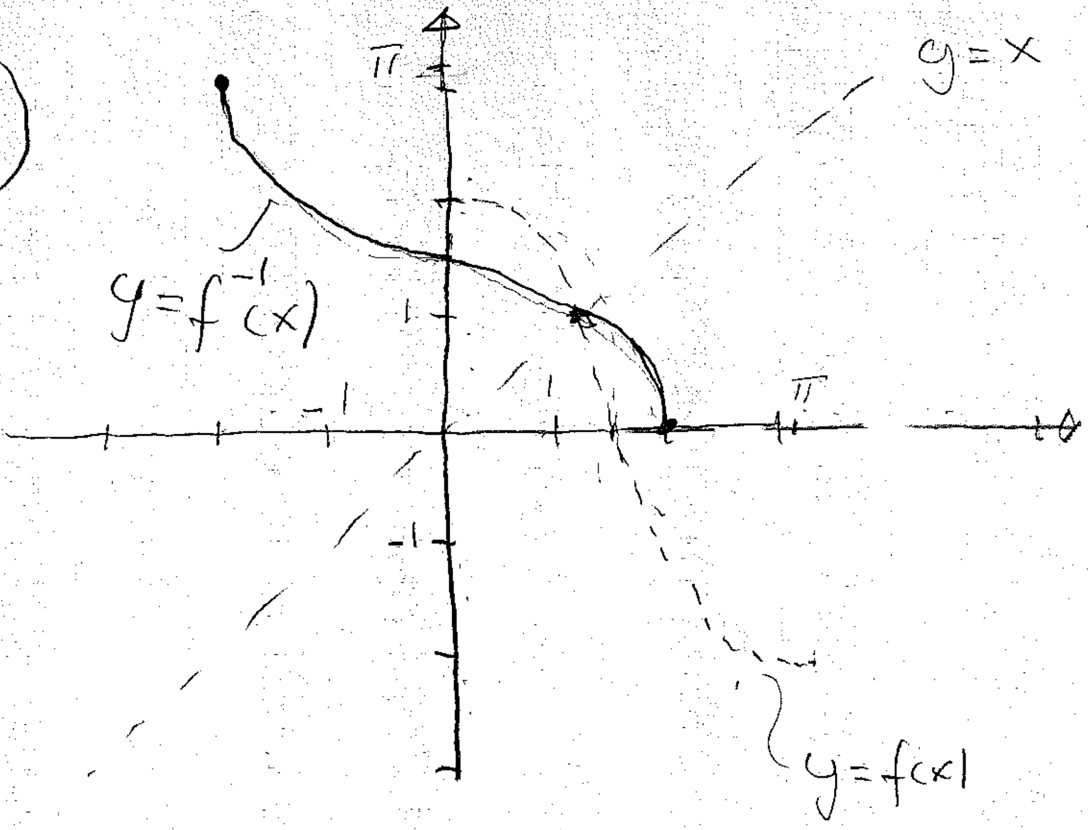
$$D_{f^{-1}} = V_f = [-2, 2], \quad V_{f^{-1}} = D_f = [0, \pi]$$

och grafen $y = f^{-1}(x)$ fås som speglingen av grafen $y = f(x)$ i linjen $y = x$

V.G. VÄND

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

7 forts



x	$f^{-1}(x)$
-2	π
0	$\frac{\pi}{2}$
2	0

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

8.

• De rationella talen har periodisk eller ändlig decimalbråksutveckling.

Detta ser man om man utför divisionen (bestämmer decimalformen) som visas i följande exempel, $\frac{12}{99}$

```
      00,121
99 ) 12,000
      9,9
      210
      198
       120
        99
        210
          osv.
```

de rester som uppstår är alltid ett tal mindre än nämnaren 99, i det allmänna fallet p/q ett tal r, $0 \leq r < q$.

Om resten någon gång blir $= 0$ fås ändlig decimalbråksutveckling. Om resten aldrig blir $= 0$ måste något av talen $1, 2, \ldots q-1$ återkomma som rest och mönstret upprepar sig därifrån på samma sätt som första gången den resten dök upp.

Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

8 forts

Inga andra tal har ändlig eller periodisk decimalbråksutveckling.

- Ändlig decimalbråksutveckling:

Exempel: $r = 12.478$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{12478}{1000} \in \mathbb{Q}$$

Det allmänna fallet:

Om $r = n + 0.d_1 d_2 \dots d_k$,

$n \in \mathbb{Z}$ och $d_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

är siffrorna i decimalbråksutv.

är

$$r = n + \frac{d_1 \dots d_k}{10^k} = \frac{n \cdot 10^k + d_1 \dots d_k}{10^k}$$

som är ett rationellt tal.

- Periodisk decimalbråksutveckling:

Exempel: $r = 1.070707\dots$

$$100r = 107.070707\dots$$

$$\Rightarrow \quad 99r = 107.070707 - 1.070707\dots = 106$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{106}{99}$$

V.G VÄND

KTH VETENSKAP OCH KONST

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

8 forts. 2

Periodisk utveckling, allmänna fallet.

Om $r = n + 0.\underbrace{d_1 d_2 \ldots d_k}\, d_1 d_2 \ldots d_k\, d_1 \ldots$

så $10^k r = 10^k n + d_1 d_2 \ldots d_k . d_1 d_2 \ldots d_k$

$$\Rightarrow \underbrace{(10^k - 1)}_{\in \mathbb{Z}} r = \underbrace{(10^k - 1)}_{\in \mathbb{Z}} n + \underbrace{d_1 d_2 \ldots d_k}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\overbrace{(10^k - 1) n + d_1 d_2 \ldots d_k}^{\text{heltal}}}{\underset{\text{heltal}}{\underset{\uparrow}{10^k - 1}}} \in \mathbb{Q}.$$

Family name, first name | Personal Registration Number | Programme | Sheet no. | Problem no.

(9.) $\frac{1}{x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x-1}{x+1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \leq 0 \overset{\text{enl}}{\underset{\text{tecken tabell}}{\Leftrightarrow}} -1 < x \leq 0$

		-1		0	
x	-	-	-	0	+ +
$x+1$	- -	0	+ + +		+
$\frac{x}{x+1}$	+	ej def	-	0	+

På samma sätt fås $\frac{1}{x+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$\frac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1$ eller $x > 0$.

Vi får alltså två fall när vi löser olikheten $\left|\frac{1}{x+1} - 1\right| > 3 \quad (*)$

(I) Om $-1 < x \leq 0$ är $(*) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{x+1} - 1 > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - 4 > 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1-4x-4}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-3-4x}{x+1} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{3+4x}{x+1} < 0$ Vi studerar tecken:

V.G. vänd

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

9 forts.

$-1 \quad -3/4 \quad x$

$3+4x$ − − − − − 0 + +

$x+1$ − − 0 + + + + +

$\frac{3+4x}{x+1}$ + + ej def − − − 0 + +

så $\left|\frac{1}{x+1}-1\right|>3 \Leftrightarrow \frac{3+4x}{x+1}<0 \Leftrightarrow -1<x<-3/4$

om $x \in (-1, 0]$

Detta ger lösningsmängd $L_I = (-1, -3/4)$

II Om $x<-1$ eller $x>0$ är (*) $\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{x+1}+1>3 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{x+1}<0 \Leftrightarrow$

$\frac{2x+3}{x+1}<0$. Teckentabell ger att detta i sin tur är ekvivalent med att

$-3/2<x<-1$

$-3/2 \quad -1 \quad x$

$2x+3$ − − 0 + + + +

$x+1$ − − − − 0 + +

$\frac{2x+3}{x+1}$ + + + 0 − − ej def + +

Detta ger för fall II ($x<-1$ eller $x>0$) lösningsmängd $L_2 = (-3/2, -1)$

Svar: $x \in (-3/2, -1) \cup (-1, -3/4)$