SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Fredagen den 24 oktober 2014

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del A på tentamen utgörs av de första tre uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de sista tre uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt $f(x) = e^{-x}\sin x$.
   A. Bestäm alla kritiska (stationära) punkter till funktionen f.
   B. Avgör vilka av de kritiska punkterna som är lokala maxpunkter.

2. Beräkna nedanstående integraler och förenkla svaren så långt som möjligt.
   A. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (använd substitutionen $x^2 = t$)
   B. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ (använd partiell integration)

3. När en kondensator laddas ur över ett motstånd gäller att spänningen u uppfyller differentialekvationen

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0$$

där R är motståndets resistans, C är kondensatorns kapacitans och $u(t)$ alltså spänningen vid tiden t.
   A. Lös differentialekvationen.
   B. Beräkna hur lång tid det tar för spänningen att halveras (förutsatt att den är positiv).

DEL B

4. Betrakta funktionerna $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{t+2}\,dt$ och $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{e^t}{t+2}\,dt$.
   A. Beräkna $F'(x)$ och $G'(x)$ med hjälp av huvudsatsen och kedjeregeln.
   B. Beräkna $F'(1)$ och $G'(1)$.

5. Använd Maclaurinpolynomet (alltså Taylorpolynomet kring origo) av grad 2 till funktionen $f(x) = e^{-x^2}$ för att approximativt beräkna integralen
$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx.$$
   Avgör sedan också om ditt approximativa värde är mindre än $1/100$ från integralens sanna värde.

6. Visa olikheten $\ln(\cos x) + x\tan x \geq x^2/2$, då $-\pi/2 < x < \pi/2$, till exempel genom att studera funktionen f given av $f(x) = \ln(\cos x) + x\tan x - x^2/2$.

Var god vänd!

DEL C

7. A. Definiera vad som menas med derivatan av en funktion f i en punkt a.
   B. Låt
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}, & x \neq 0 \\ -1/2, & x = 0\,. \end{cases}$$
   Använd derivatans definition för att beräkna $f'(0)$.

8. Beräkna arean av den rätvinkliga triangel som begränsas av koordinataxlarna och tangentlinjen i punkten $(2,1)$ till kurvan med ekvation $(x^2 + y^2)^2 - 7x^2 + 3y^2 = 0$.

9. Låt $f(x) = x^3 + x + 1$.
   A. Visa att funktionen f är inverterbar.
   B. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^3 g(t)\,dt$ där g är inversen till f.