SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2014-10-24

DEL A

1. Låt $f(x) = e^{-x} \sin x$.
   A. Bestäm alla kritiska (stationära) punkter till funktionen f.
   B. Avgör vilka av de kritiska punkterna som är lokala maxpunkter.

Lösning. Vi ser att f är definierad för alla x. Vi deriverar och får

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

som existerar för alla x. Eftersom $e^{-x} \neq 0$ gäller att

$$f'(x) = 0 \iff \cos x - \sin x = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} + n\pi,$$

n godtyckligt heltal. De kritiska punkterna är alltså $x = \pi/4 + n\pi$, n godtyckligt heltal.

Vi deriverar en gång till och får

$$f''(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2\cos x e^{-x}.$$

Vi undersöker nu andraderivatans tecken i de kritiska punkterna. Vi ser att:
Om $x = \pi/4 + n2\pi$, n heltal, så är $f'(x) = 0$ och $f''(x) < 0$. Dessa punkter är alltså lokala maxpunkter.
Om $x = 5\pi/4 + n2\pi$, n heltal, så är $f'(x) = 0$ och $f''(x) > 0$. Dessa punkter är alltså lokala minpunkter.

(Obs: om man inte vill använda andraderivata kan man istället göra ett teckenstudium av förstaderivatan för att klargöra vilka av de kritiska punkterna som är lokala maxpunkter). □

Svar: A. De kritiska punkterna är $x = \pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.
B. Lokala maxpunkter är $x = \pi/4 + n2\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

2. Beräkna nedanstående integraler och förenkla svaren så långt som möjligt.

   A. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (använd substitutionen $x^2 = t$)

   B. $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$ (använd partiell integration)

Lösning. A. Vi använder substitutionen $x^2 = t$ med $2x\,dx = dt$ och nya gränser 0 och 1. Vi får:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\left[\arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

B. Med partiell integration får vi

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = \left[-x\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x\,dx = \pi.$$

$\square$

Svar: A. $\pi/8$
B. π

3. När en kondensator laddas ur över ett motstånd gäller att spänningen u uppfyller differentialekvationen

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0$$

där R är motståndets resistans, C är kondensatorns kapacitans och $u(t)$ alltså spänningen vid tiden t.

A. Lös differentialekvationen.

B. Beräkna hur lång tid det tar för spänningen att halveras (förutsatt att den är positiv).

Lösning. A. Differentialekvationen är en homogen linjär ekvation av första ordningen. Dess karaktäristiska ekvation $r + \dfrac{1}{RC} = 0$ har lösning $r = -1/RC$, varför differentialekvationens lösning är

$$u(t) = ke^{-t/RC},$$

där k är en godtycklig konstant.

B. Vid tiden $t = 0$ är spänningen k, som med våra förutsättningar måste vara ett positivt tal. Vi söker nu den tidpunkt T då spänningen har halverats och alltså är $k/2$. Vi får ekvationen

$$\frac{k}{2} = ke^{-T/RC}$$

som för $k > 0$ är ekvivalent med ekvationen $-\ln 2 = -T/RC$ som har lösningen $T = RC \ln 2$.

$\square$

Svar: A. $u(t) = ke^{-t/RC}$, där k är en godtycklig konstant.

B. Spänningen har halverats efter tiden $RC \ln 2$.

DEL B

4. Betrakta funktionerna $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{t+2}\,dt$ och $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{e^t}{t+2}\,dt$.
   A. Beräkna $F'(x)$ och $G'(x)$ med hjälp av huvudsatsen och kedjeregeln.
   B. Beräkna $F'(1)$ och $G'(1)$.

Lösning. Vi börjar med funktionen F. Med hjälp av huvudsatsen får vi omedelbart att $F'(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$ (för $x > -2$) och alltså $F'(1) = e/3$.
Vi fortsätter med funktionen G som är en sammansatt funktion. Med hjälp av huvudsatsen och kedjeregeln får vi att $G'(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^2+2} \cdot 2x$ och $G'(1) = 2e/3$. □

Svar: A. $F'(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$ och $G'(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^2+2} \cdot 2x$.
B. $F'(1) = e/3$ och $G'(1) = 2e/3$.

5. Använd Maclaurinpolynomet (alltså Taylorpolynomet kring origo) av grad 2 till funktionen $f(x) = e^{-x^2}$ för att approximativt beräkna integralen
$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\, dx.$$
Avgör sedan också om ditt approximativa värde är mindre än $1/100$ från integralens sanna värde.

Lösning. Med hjälp av Taylors formel (standardutveckling) får vi att
$$e^t = 1 + t + \frac{e^c}{2!} t^2$$
för något tal c mellan 0 och t.
Om vi i detta substituerar $-x^2$ för t får vi
$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{e^c}{2!} x^4$$
för något tal c mellan 0 och $-x^2$.

Detta betyder att vi har approximationen
$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2$$
med ett fel som i det aktuella intervallet till absolutbeloppet är högst $x^4/2$ (här har vi använt att $e^c \leq 1$ om $c \leq 0$). Sätter vi in denna information i integralen får vi
$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\, dx \approx \int_0^{1/2} (1 - x^2)\, dx = \frac{11}{24}.$$
Felet i denna approximation är till beloppet högst
$$\int_0^{1/2} \frac{x^4}{2}\, dx = \frac{1}{320} < \frac{1}{100}.$$
□

Svar: $11/24$, approximationen är inom den givna felmarginalen.

6. Visa olikheten $\ln(\cos x) + x\tan x \geq x^2/2$, då $-\pi/2 < x < \pi/2$, till exempel genom att studera funktionen f given av $f(x) = \ln(\cos x) + x\tan x - x^2/2$.

Lösning. Vi sätter $f(x) = \ln(\cos x) + x\tan x - x^2/2$ för x som uppfyller $-\pi/2 < x < \pi/2$. För sådana x är olikheten

$$\ln(\cos x) + x\tan x \geq x^2/2$$

ekvivalent med olikheten $f(x) \geq 0$. Vi observerar att f är definierad och kontinuerlig då $-\pi/2 < x < \pi/2$. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} + \tan x + x(1+\tan^2 x) - x = x\tan^2 x$$

som existerar för alla aktuella x. Vi ser att $f'(x) = 0 \iff x = 0$, om x ligger i det aktuella intervallet. Vi gör ett teckenstudium av derivatan:

Om $-\pi/2 < x < 0$ så gäller att $f'(x) < 0$ och det följer att f är strängt avtagande här.

Om $x = 0$ så är $f'(x) = 0$.

Om $0 < x < \pi/2$ så gäller att $f'(x) > 0$ och det följer att f är strängt växande här.

Det följer direkt av teckenstudiet att f har en global minpunkt i $x = 0$ och funktionens minsta värde är $f(0) = 0$. Därmed är olikheten bevisad.

$\square$

Svar: Se lösningen.

DEL C

7. A. Definiera vad som menas med derivatan av en funktion f i en punkt a.
   B. Låt
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}, & x \neq 0 \\ -1/2, & x = 0\,. \end{cases}$$
   Använd derivatans definition för att beräkna $f'(0)$.

Lösning. A. Med $f'(a)$, derivatan av funktionen f i punkten a, menas
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
om detta gränsvärde existerar ändligt. Om gränsvärdet inte existerar ändligt så är f inte deriverbar i punkten a.

B. Enligt derivatans definition ska vi undersöka gränsvärdet
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$
Om detta gränsvärde existerar ändligt så är f deriverbar och gränsvärdet är $f'(0)$.

Med vår funktion f får vi (med Taylorutveckling av $\ln(1+h)$ vid andra likhetstecknet):
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\ln(1+h) - h}{h^2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \mathcal{O}(h^4) - h}{h^2} + \dfrac{1}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{3} + \mathcal{O}(h^2)}{h} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$
Vår funktion f är alltså deriverbar i origo och $f'(0) = 1/3$. □

Svar: A. Se lösningen.
B. $f'(0) = 1/3$

8. Beräkna arean av den rätvinkliga triangel som begränsas av koordinataxlarna och tangentlinjen i punkten $(2, 1)$ till kurvan med ekvation $(x^2 + y^2)^2 - 7x^2 + 3y^2 = 0$.

   Lösning. Vi söker först den aktuella tangentlinjen. Genom implicit derivering av ekvationen $(x^2 + y^2)^2 - 7x^2 + 3y^2 = 0$ får vi

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') - 14x + 6yy' = 0.$$

   Om vi i denna ekvation sätter in den aktuella punktens koordinater, dvs $x = 2$ och $y = 1$, erhålls ekvationen

$$10(4 + 2y'(2)) - 28 + 6y'(2) = 0$$

   där vi kan lösa ut $y'(2)$. Vi får efter förenkling

$$y'(2) = -\frac{6}{13}$$

   Tantentlinjen till kurvan i den aktuella punkten får alltså en ekvation

$$y - 1 = -\frac{6}{13}(x - 2).$$

   Nu söker vi skärningspunkterna mellan tangentlinjen och koordinataxlarna. Skärningen med x-axeln fås när $y = 0$ och skärningspunktens x-koordinat fås alltså ur ekvationen $-1 = (-6/13)(x - 2)$, som har lösningen $x = 25/6$. Skärningen med y-axeln fås när $x = 0$ och skärningspunktens y-koordinat fås alltså ur ekvationen $y - 1 = (-6/13)(-2)$, som har lösningen $y = 25/13$.

   Den area som söks är tydligen arean av en rätvinklig rektangel med bas $25/6$ och höjd $25/13$. Arean är

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{6} \cdot \frac{25}{13} = \frac{625}{156}.$$

$\square$

   Svar: $625/156$

9. Låt $f(x) = x^3 + x + 1$.

A. Visa att funktionen f är inverterbar.

B. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^3 g(t)\,dt$ där g är inversen till f.

Lösning. A. Funktionen f är ett polynom och därför deriverbar överallt. Vi deriverar och får $f'(x) = 3x^2 + 1$ och vi ser att $f'(x) > 0$ för alla x. Det följer att f är strängt växande och därför injektiv och alltså också inverterbar.

B. Om g är inversen till f så gör vi i integralen variabelbytet $t = f(x)$ med $dt = f'(x)dx$. När $t = 1$ så är $x = 0$ och när $t = 3$ så är $x = 1$. Vi får alltså:

$$\int_1^3 g(t)\,dt = \int_0^1 g(f(x))f'(x)\,dx = \int_0^1 x(3x^2+1)\,dx = \int_0^1 (3x^3+x)\,dx = \frac{5}{4}.$$

$\square$

Svar: A. Se lösningen.

B. $5/4$