KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Onsdagen 29 oktober, 2014

Skrivtid: 14.00-19.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. (a) Bestäm linjen genom punkterna $A = (0, 0, 1)$ och $B = (2, 4, -1)$. **(1 p)**

   (b) Med hjälp av *projektion* kan man bestämma det kortaste avståndet från en punkt P till en linje ℓ. Förklara hur man gör detta genom att beräkna kortaste avståndet från punkten $P = (1, 2, 4)$ till linjen som ges av $(1-t, 2-2t, t)$, där t är en reell parameter. **(3 p)**

2. (a) För vilka värden på parametern a utgör vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}$$

   en bas i rummet $\mathbb{R}^3$? **(2 p)**

   (b) Låt $a = 3$, och bestäm koordinatvektorn av

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   med avseende på basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. **(2 p)**

3. Vi har matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   a) Bestäm inversen till matrisen A. **(2 p)**

   b) Lös matrisekvationen $XA = B$. **(2 p)**

DEL B

4. En linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har egenvärden $\lambda = 0, 1, 2$ och 4. Låt A vara dess standardmatris.
   (a) Är A diagonaliserbar? **(1 p)**
   (b) Vilken dimension har bildrummet $\mathrm{Im}(T)$. **(2 p)**
   (c) Bestäm det karakteristiska polynomet till A. **(1 p)**

5. Vi har baserna $\beta = \{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\}$ och $\gamma = \{\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\2\\3\end{bmatrix}\}$ för vektorrummet i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x + y + z = 0$.
   (a) Vad menas med en basbytesmatris? **(2 p)**
   (b) Bestäm vilken av matriserna nedan som är basbytesmatrisen från basen β till basen γ (motivera ditt svar) **(2 p)**

$$P_1 = \begin{bmatrix}-1 & -2\\2 & -3\end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}-3 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix}1 & -5\\1 & 2\\-2 & 3\end{bmatrix}.$$

6. Temperaturen i Algots hus varierar över året ungefär enligt modellen
$$T = 20 + r\sin\frac{(m+d)\pi}{6},$$
där T är temperaturen (i grader Celsius), m är månadens nummer (1 för januari, 2 för februari, o.s.v.), och r och d är reella konstanter som uppfyller $r > 0$ och $-6 < d \leq 6$. Förra året mätte Algot temperaturen vid fyra tillfällen: I januari var det 17.0 grader, i februari var det 20.0 grader, i mars var det 18.6 grader och i september var det 21.6 grader.

   Algot vill anpassa modellen till mätvärdena genom att bestämma konstanterna r och d så att summan av kvadraterna av felen minimeras. (Med felen menas här skillnaden mellan mätvärdena och den temperatur som ges av modellen.)
   (a) Modellen kan också skrivas $T - 20 = a\sin\frac{m\pi}{6} + b\cos\frac{m\pi}{6}$, där $a = r\cos\frac{d\pi}{6}$ och $b = r\sin\frac{d\pi}{6}$ är reella konstanter. (Du kommer väl ihåg formeln $\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u\sin v$!) Bestäm konstanterna a och b så att felkvadratsumman minimeras. **(3 p)**
   (b) Hur ska Algot välja konstanterna r och d? **(1 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. En *tetraeder* är en tredimensionell kropp med fyra hörn och fyra triangelformade sidor. Tetraedern är *regelbunden* om alla fyra sidor är liksidiga trianglar. Låt $\vec{x}$, $\vec{y}$ och $\vec{z}$ vara de tre vektorerna längs kanterna från ett hörn i en regelbunden tetraeder där

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1.$$

   (a) Visa att vektorn $\vec{z} - \frac{1}{3}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$ är en vektor som ger höjden av tetraedern mot sidan som spänns upp av $\vec{x}$ och $\vec{y}$. **(2 p)**
   (b) Bestäm längden av $\vec{z} - \frac{1}{3}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$. **(2 p)**

8. Låt A vara en fixerad $(n \times n)$ matris.
   (a) Visa att alla $(n \times n)$ matriser X som kommuterar med A, dvs sådana att $AX = XA$, utgör ett vektorrum. **(2 p)**
   (b) Bestäm en bas av detta vektorrum i fall $n = 2$ och då **(2 p)**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Vid ett universitet finns tre lunchrestauranger med dom fantasifulla namnen A, B och C. Alla studenter byter restaurang varje dag för att få omväxling. Av dom som går till A en viss dag kommer precis hälften att gå till B nästa dag och den andra hälften går till C. På samma sätt går hälften av B-besökarna till A dagen därpå och hälften till C. Men av dom som går till C går alla till B nästa dag. (Ingen vill byta direkt från C till A för maten är så mycket sämre där.)

   Processen kan beskrivas som en markovkedja med tre tillstånd. Om $a(n), b(n), c(n)$ betecknar antalet studenter som går till A, B respektive C dag n så har överföringsmatrisen $\mathbf{T}$ egenskapen att

$$\begin{pmatrix} a(n+1) \\ b(n+1) \\ c(n+1) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} a(n) \\ b(n) \\ c(n) \end{pmatrix}$$

   för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$.
   (a) Bestäm två egenvektorer till $\mathbf{T}$ hörande till egenvärdena 1 respektive $-1/2$. **(2 p)**
   (b) En viss dag går exakt lika många studenter till alla tre restauranger. Hur ser fördelningen ut 30 lunchdagar senare? **(2 p)**