KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 14.10.29

DEL A

1. (a) Bestäm linjen genom punkterna $A = (0, 0, 1)$ och $B = (2, 4, -1)$. **(1 p)**

   (b) Med hjälp av *projektion* kan man bestämma det kortaste avståndet från en punkt P till en linje ℓ. Förklara hur man gör detta genom att beräkna kortaste avståndet från punkten $P = (1, 2, 4)$ till linjen som ges av $(1-t, 2-2t, t)$, där t är en reell parameter. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Linjen kan skrivas $\overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ och vi har

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Alltså ges linjen av $(2t, 4t, 1-2t)$

(b) Vi kan dela upp en vektor från en punkt på linjen, säg Q, till punkten P i en del som är parallell med linjen och en del som är vinkelrät mot linjen. Kortaste avståndet ges då av längden av den vektor som är vinkelrät mot linjen. Vi använder projektion på linjens riktningsvektor för att få fram den del som är parallell med linjen.

Riktningsvektorn för linjen är $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$, och vi kan välja punkten $Q = (1, 2, 0)$. Vektorn $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}^T$. Projektionen av $\overrightarrow{PQ}$ på riktningsvektorn $\vec{v}$ blir

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}}(\overrightarrow{PQ}) = \frac{-4}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

och speciellt har vi att den vinkelräta komponenten är

$$\vec{w} = \overrightarrow{PQ} - \operatorname{proj}_{\vec{v}}(\overrightarrow{PQ}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{-2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

Avståndet blir

$$|\,\vec{w}\,| = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 16 + 100} = \frac{2}{3}\sqrt{30}.$$

Svar.

2. (a) För vilka värden på parametern a utgör vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}$$

en bas i rummet $\mathbb{R}^3$? **(2 p)**

(b) Låt $a = 3$, och bestäm koordinatvektorn av

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

med avseende på basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) För att vektorerna $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ska bilda en bas i $\mathbb{R}^3$, så krävs det att vi har tre linjärt oberoende vektorer. Då räcker det att determinanten för matrisen som bildas av vektorerna är nollskild. Vi har

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix} = 1(4 - a^2) - (2 - a) + 2(a - 2) = -a^2 + 3a - 2$$

Vi har vidare att polynomet $a^2 - 3a + 2 = (a - 1)(a - 2)$, så dess nollställen är $a = 1$ och $a = 2$. Determinanten är nollskild om $a \neq 1$ och $a \neq 2$.

(b) Vi söker sådana tal c_1, c_2, c_3 att $\vec{e}_1 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$. Detta ger oss ett system av linjära ekvationer med matris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Man löser systemet m h av Gausselimination och man får koordinater $c_1 = 5/2$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1/2$. Koordinatvektorn blir $\begin{bmatrix} 5/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}^T$.

Svar.

3. Vi har matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm inversen till matrisen A. **(2 p)**

b) Lös matrisekvationen $XA = B$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi bildar matrisen

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

och genomför radoperationer som transformerar vänstermatris till enhetsmatris. Om R_1, R_2 betecknar raderna av matrisen, så får vi: 1. $R_1 := R_1/2$ ger oss

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

2. $R_2 := R_2 - R_1$ ger oss

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right];$$

3. $R_2 := 2/5 \cdot R_2$ ger oss

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5 \end{array}\right];$$

4. $R_1 := R_1 - 3/2 \cdot R_2$ ger oss

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5 \end{array}\right].$$

Erhållen högermatris ger oss inversmatrisen:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi multiplicerar ekvationen med A^{-1} från höger. Vi får då $XAA^{-1} = BA^{-1}$ varav $X = BA^{-1}$. Matrismultiplikation ger oss

$$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 12 & -14 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Svar.

DEL B

4. En linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har egenvärden $\lambda = 0, 1, 2$ och 4. Låt A vara dess standardmatris.
   (a) Är A diagonaliserbar? **(1 p)**
   (b) Vilken dimension har bildrummet $\operatorname{Im}(T)$. **(2 p)**
   (c) Bestäm det karakteristiska polynomet till A. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) En avbildning är diagonaliserbar om den kan skrivas som en diagonalmatris i en ny bas. Eftersom vår matris har egenvärden $\lambda = 0, 1, 2, 4$, så kan vi skriva matrisen A för T i basen av egenvektorer som

$$D_T = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Dimensionen till ett egenrum är mindre eller lika med den algebraiska multipliciteten till det tillhörande egenvärdet. Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 0$ är nollrummet, som i det här fallet har dimension 1. Det följer då att bildrummet har dimension 4-1=3.

(c) Karakteristiska polynomet till matrisen kan beräknas från diagonalmatrisen. Detta ger ger oss att det karakteristiska pollynomet är

$$c_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4),$$

Svar.

5. Vi har baserna $\beta = \{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\}$ och $\gamma = \{\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\2\\3\end{bmatrix}\}$ för vektorrummet i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen $x+y+z=0$.
   (a) Vad menas med en basbytesmatris? **(2 p)**
   (b) Bestäm vilken av matriserna nedan som är basbytesmatrisen från basen β till basen γ (motivera ditt svar) **(2 p)**

$$P_1 = \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix}1 & -5\\ 1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag.

(a) Enligt definition, basbytesmatris från bas β till bas γ är en sådan matris att dess kolonner är koordinatvektorer av elementer i bas β där koordinater tas med avseende på bas γ.

(b) För att bestämma basbytesmatris från β till γ, börjar vi först med vektorn

$$\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

Den skall uttryckas som linjär kombination av basvektorer γ_1 och γ_2 dett vill säga $\beta_1 = a\gamma_1 + b\gamma_2$. Detta ger oss ett linjärt system av ekvationer

$$\begin{cases} 1 &= a - 5b \\ -1 &= a + 2b \\ 0 &= -2a + 3b. \end{cases}$$

Systemet har lösningar $a = -3/7$, $b = -2/7$. Således får vi första kolonnen i basbytesmatris:

$$\begin{bmatrix}-3/7\\-2/7\end{bmatrix}.$$

Av angivna matriserna endst matrisen P_2 har den kolonnen som sin första kolonn. Vi kollar också att den andra kolonnen av P_2 innehåller rätta koordinater d v s vi kollar att talen $2/7$ och $-1/7$ är koordinater av vektorn $\beta_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ i bas γ_1, γ_2. Man verifierar att $\beta_2 = 2/7 \cdot \gamma_1 - 1/7 \cdot \gamma_2$ genom direkt beräkning.

Svar.

6. Temperaturen i Algots hus varierar över året ungefär enligt modellen

$$T = 20 + r \sin \frac{(m+d)\pi}{6},$$

där T är temperaturen (i grader Celsius), m är månadens nummer (1 för januari, 2 för februari, o.s.v.), och r och d är reella konstanter som uppfyller $r > 0$ och $-6 < d \leq 6$. Förra året mätte Algot temperaturen vid fyra tillfällen: I januari var det 17.0 grader, i februari var det 20.0 grader, i mars var det 18.6 grader och i september var det 21.6 grader.

Algot vill anpassa modellen till mätvärdena genom att bestämma konstanterna r och d så att summan av kvadraterna av felen minimeras. (Med felen menas här skillnaden mellan mätvärdena och den temperatur som ges av modellen.)

(a) Modellen kan också skrivas $T - 20 = a \sin \frac{m\pi}{6} + b \cos \frac{m\pi}{6}$, där $a = r \cos \frac{d\pi}{6}$ och $b = r \sin \frac{d\pi}{6}$ är reella konstanter. (Du kommer väl ihåg formeln $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$!) Bestäm konstanterna a och b så att felkvadratsumman minimeras. **(3 p)**

(b) Hur ska Algot välja konstanterna r och d? **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi gör först en tabell över Algots mätningar där vi också beräknar $\sin \frac{m\pi}{6}$ och $\cos \frac{m\pi}{6}$.

m	$T-20$	$\sin \frac{m\pi}{6}$	$\cos \frac{m\pi}{6}$
1	-3.0	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
2	0.0	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
3	-1.4	1	0
9	1.6	-1	0

Alltså får vi det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -3.0 \\ 0.0 \\ -1.4 \\ 1.6 \end{bmatrix}.$$

Genom att multiplicera med systemmatrisens transponat från vänster får vi normalekvationerna

$$\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/2 \\ -3\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

med den unika lösningen $a = -1$, $b = -\sqrt{3}$.

(b) Eftersom $a = r \cos \frac{d\pi}{6}$ och $b = r \sin \frac{d\pi}{6}$ är $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ och vi ska välja d så att $\cos \frac{d\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ och $\sin \frac{d\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Enda möjligheten i intervallet $(-6, 6]$ är $d = -4$.

DEL C

7. En *tetraeder* är en tredimensionell kropp med fyra hörn och fyra triangelformade sidor. Tetraedern är *regelbunden* om alla fyra sidor är liksidiga trianglar. Låt $\vec{x}$, $\vec{y}$ och $\vec{z}$ vara de tre vektorerna längs kanterna från ett hörn i en regelbunden tetraeder där

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1.$$

(a) Visa att vektorn $\vec{z} - \frac{1}{3}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$ är en vektor som ger höjden av tetraedern mot sidan som spänns upp av $\vec{x}$ och $\vec{y}$. **(2 p)**

(b) Bestäm längden av $\vec{z} - \frac{1}{3}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi betecknar det hörnet som är gemensamma fotpunkt för vektorerna $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ med O och övriga hörn i tetraedern med A, B, C så att $\vec{x} = \vec{OA}$; $\vec{y} = \vec{OB}$; $\vec{z} = \vec{OC}$. Sidan som späns upp av $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är triangeln OAB som är liksidig. Höjden av tetraedern till denna sida är sträckan från punkten C till centrum D av triangeln OAB (detta ser man från symmetri). Ortsvektorn av centrum av en liksidig triangeln får man som medelvärdet av ortsvektorer av tre hörn och vi får

$$\vec{OD} = \frac{1}{3}\left(\vec{OO} + \vec{OA} + \vec{OB}\right) = 1/3 \cdot \vec{x} + 1/3 \cdot \vec{y}.$$

Till slut, höjden $\vec{DC}$ blir

$$\vec{DC} = \vec{OC} - \vec{OD} = \vec{z} - 1/3 \cdot \vec{x} - 1/3 \cdot \vec{y}.$$

Alternativt: Höjden i tetraedern är $\vec{z}$ minus projektionen av $\vec{z}$ ned på planet som spänns upp av $\vec{x}$ och $\vec{y}$. Av symmetri så är det klart att projektionen av $\vec{z}$ ned i x, y-planet hamnar på linjen $L = \mathrm{Span}(\vec{x} + \vec{y})$. Höjden i tetraedern är alltså

$$\vec{z} - \mathrm{Proj}_L(\vec{z}).$$

För att bestämma $\mathrm{Proj}_L(\vec{z})$ behöver vi längden av riktningsvektorn $\vec{x} + \vec{y}$. Vi kan skriva

$$\vec{y} = \mathrm{Proj}_{\vec{x}}(\vec{y}) + \vec{y} - \mathrm{Proj}_{\vec{x}}(\vec{y})$$

där $\vec{y}^{\perp} = \vec{y} - \mathrm{Proj}_{\vec{x}}(\vec{y})$ är vinkelrät mot $\vec{x}$. Av regulariteten till tetraedern följer det att vinkeln mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är $\pi/3$. Detta, och att $||\vec{x}|| = 1$, ger att

$$\mathrm{Proj}_{\vec{x}}(\vec{y}) = \frac{1}{2}\vec{x}.$$

Längden av $\vec{x} + \vec{y}$ är därmed

$$\sqrt{(1 + \frac{1}{2})^2 + \mid \vec{y}^{\perp} \mid} = \sqrt{\frac{9}{4} + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{3}.$$

Vi erhåller att

$$\mathrm{Proj}_L(\vec{z}) = \frac{1}{3}(\vec{z}\vec{x} + \vec{z}\vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})(\vec{x} + \vec{y}) = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y}).$$

(b) Eftersom triangeln OAB är liksidig, vinkeln mellan vektorer $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är $\frac{\pi}{3}$. Detta ger oss $\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 1/2$. Analogt får vi också att $\vec{x}\cdot\vec{z} = 1/2$ och $\vec{y}\cdot\vec{z} = 1/2$. Om $\vec{h} = \vec{z} - \frac{1}{3}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$, då är

$$\|\vec{h}\|^2 = \vec{h}\cdot\vec{h} = (\vec{z} - \frac{1}{3}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y})\cdot(\vec{z} - \frac{1}{3}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}) =$$
$$= \|\vec{z}\|^2 + \frac{1}{9}\|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{9}\|\vec{y}\|^2 - \frac{2}{3}\vec{z}\cdot\vec{x} - \frac{2}{3}\vec{z}\cdot\vec{y} + \frac{2}{9}\vec{x}\cdot\vec{y} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}.$$

Längden är $\sqrt{2/3}$.

Svar.

8. Låt A vara en fixerad $(n \times n)$ matris.
   (a) Visa att alla $(n \times n)$ matriser X som kommuterar med A, dvs sådana att $AX = XA$, utgör ett vektorrum. **(2 p)**
   (b) Bestäm en bas av detta vektorrum i fall $n = 2$ och då **(2 p)**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag.

(a) Eftersom rummet av alla matriser (av samma dimension) är ett vektorrum (Se boken Exempel 3, sidan 198) så räcker det att visa att mängden V av alla matriser som kommuterar med A är ett delrum. Det vill säga att V innehåller noll vektorn, är sluten under addition, samt multiplikation med tal.
Det är klart att nollmatrisen kommuterar med A, så första kravet är satisfierad. Vi har vidare att om X_1 och X_2 är med i V, då gäller att

$$(X_1 + X_2)A = X_1A + X_2A = AX_1 + AX_2 = A(X_1 + X_2),$$

med andra ord att $X_1 + X_2 \in V$. Slutligen, om X kommuterar med A då vill uppenbarligen också αX kommutera med A;

$$(\alpha X)A = \alpha(XA) = \alpha(AX) = A(\alpha X).$$

Det vill säga att V är sluten under addition och multiplikation med tal, och därmed ett delrum.

(b) Låt

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

vara en matris i delrummet V, som genereras av A i övningen. Då gäller det att $XA = AX$. Det vill säga att

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

vilket leder till

$$\begin{bmatrix} -a + 2b & a + 3b \\ -c + 2d & c + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a + c & -b + d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{bmatrix}.$$

Ur detta får vi sambanden

$$c = 2b, \qquad d = a + 2c, \qquad d = a + 4b,$$

där det sista ekvationen kan ignoreras, eftersom den fås av de två första. Vi har således följande ekvationer att lösa:

$$c = 2b, \qquad d = a + 2c,$$

vilket ger oss två fria parametrar, a, b, och vi har

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a+4b \end{bmatrix}$$

för alla reella tal a, b. Svaret kan provas med en direkt kalkyl (gör det). Man skriver matrisen X som

$$X = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Detta ger oss en bas $\{X_1, X_2\}$, där

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Svar.

9. Vid ett universitet finns tre lunchrestauranger med dom fantasifulla namnen A, B och C. Alla studenter byter restaurang varje dag för att få omväxling. Av dom som går till A en viss dag kommer precis hälften att gå till B nästa dag och den andra hälften går till C. På samma sätt går hälften av B-besökarna till A dagen därpå och hälften till C. Men av dom som går till C går alla till B nästa dag. (Ingen vill byta direkt från C till A för maten är så mycket sämre där.)

   Processen kan beskrivas som en markovkedja med tre tillstånd. Om $a(n), b(n), c(n)$ betecknar antalet studenter som går till A, B respektive C dag n så har överföringsmatrisen $\mathbf{T}$ egenskapen att

$$\begin{pmatrix} a(n+1) \\ b(n+1) \\ c(n+1) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} a(n) \\ b(n) \\ c(n) \end{pmatrix}$$

   för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

   (a) Bestäm två egenvektorer till $\mathbf{T}$ hörande till egenvärdena 1 respektive $-1/2$.

   (2 p)

   (b) En viss dag går exakt lika många studenter till alla tre restauranger. Hur ser fördelningen ut 30 lunchdagar senare?

   (2 p)

Lösningsförslag.

(a) Överföringsmatrisen är

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ska lösa dom homogena ekvationssystemen $(\mathbf{T} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $(\mathbf{T} + \frac{1}{2}\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Det första har systemmatris

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Genom att addera hälften av första raden till dom andra raderna får vi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 \\ 0 & 3/4 & -1 \end{pmatrix}$$

och adderar vi nu andra raden till tredje raden får vi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

med den allmänna lösningen $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

Det andra ekvationssystemet har systemmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Om vi subtraherar den första raden från dom andra två raderna får vi

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

med den allmänna lösningen $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

Till exempel är alltså $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ egenvektorer till T hörande till egenvärdena 1 respektive $-1/2$.

(b) Starttillståndet är $\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$ för något reellt tal a. Detta går att skriva som en linjärkombination av egenvektorerna som vi hittade:

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} = \frac{a}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{a}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Efter 30 dagar är tillståndet

$$\mathbf{T}^{30} \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{30} \left(\frac{a}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{a}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{a}{3} \mathbf{T}^{30} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{a}{3} \mathbf{T}^{30} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{a}{3} \cdot 1^{30} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{a}{3} \cdot (-1/2)^{30} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{a}{3} \begin{bmatrix} 2 + 2^{-30} \\ 4 - 2^{-30} \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Eftersom $2^{30} = (2^{10})^3 > 1000^3 = 10^9$ så är $2^{-30}a/3 < 1$ vilket är försumbart litet när man räknar lunchgäster. Fördelningen blir alltså $2 : 4 : 3$ mellan restaurangerna A, B, C efter 30 dagar.
