



EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 2:
Dynamik i återkopplade system och PID-reglering





Mer kursinformation

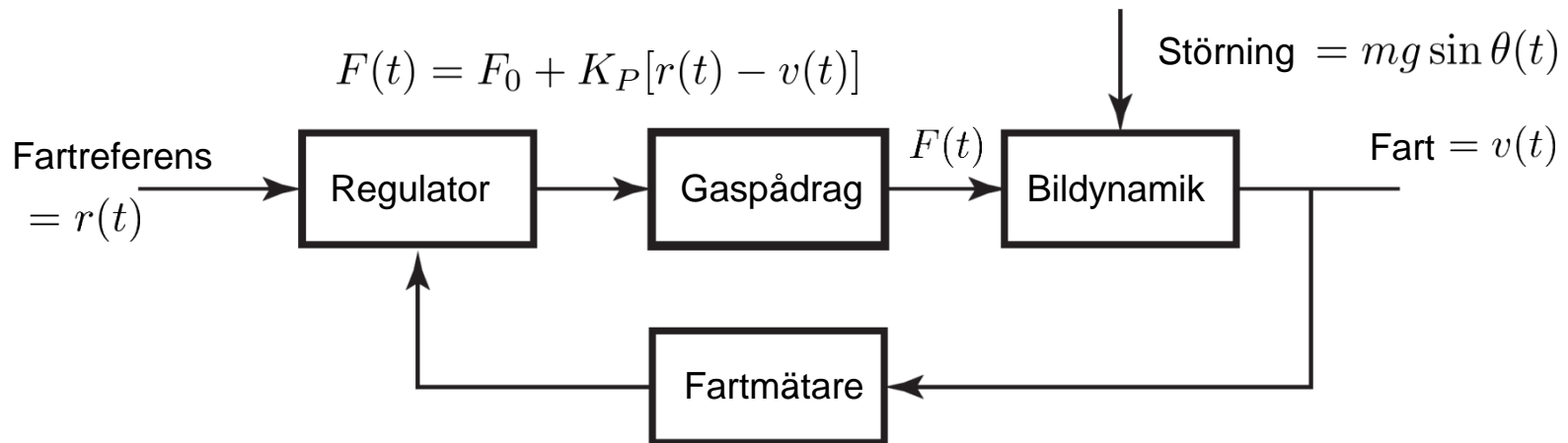
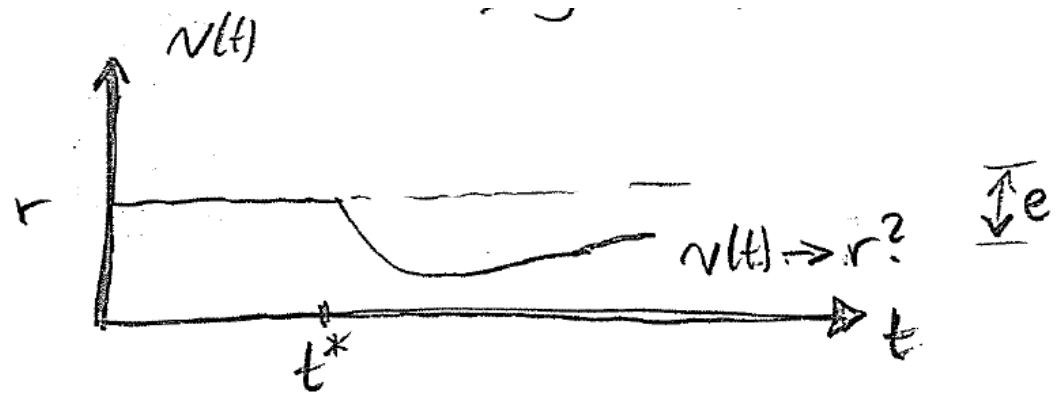
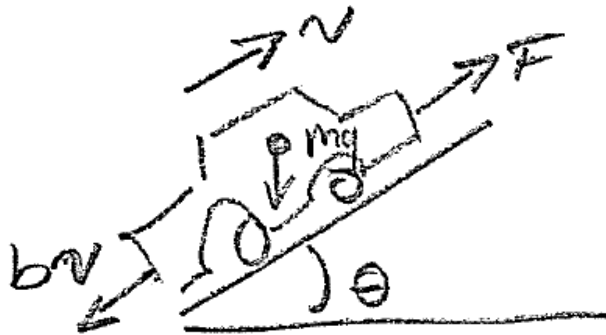
- Kurs-PM på kurshemsidan www.kth.se/social/course/EL1000/
- Labbokning under <http://bilda.kth.se>
- Lab3 kommer inte läggas upp riktigt än
- Glöm ej att registrera dig på kursen
- Kompendium finns på STEX (öppet 9.30-11.00 och 12.00-14.00) och att ladda ner på kurshemsidan
- Kursnämndsrepresentant från farkost, maskin, produkt och industriell ekonomi?



Dagens program

- Lösning av linjär differentialekvation (repetition)
 - Homogen och partikulär lösning
 - Laplacetransformen
- Analys av farthållare med PI-reglering
- Från differentialekvation till överföringsfunktion
- Poler och nollställen
- Stabilitet, snabbhet och dämpning från poler
- Slutna systems överföringsfunktion

Farthållning av bil med återkoppling (P-reg.)





Frågor

1. Hur ser insvängningsförloppet av stegsvar ut?
2. Kommer stegsvaret alls att svänga in? (Är det återkopplade systemet *asymptotiskt stabilt*?)
3. Finns det enklare sätt att räkna ut statiska reglerfel?

Svar: 1-2: Studera differentialekvation i detalj
1-3: Använd Laplacetransformen



Lösning av differentialekvation

- Exempel: $\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2y(t) = u(t)$
 $u(t) = 1, t > 0$

- *Alla* lösningar kan skrivas på formen:

$$y(t) = y_{\text{part.}}(t) + y_{\text{hom.}}(t)$$

- En partikulär lösning är $y_{\text{part.}}(t) = \frac{1}{a_2}$

- Homogen lösning (alltså $u(t) = 0$)

$$y_{\text{hom.}}(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 \quad \text{valfria konstanter}$$

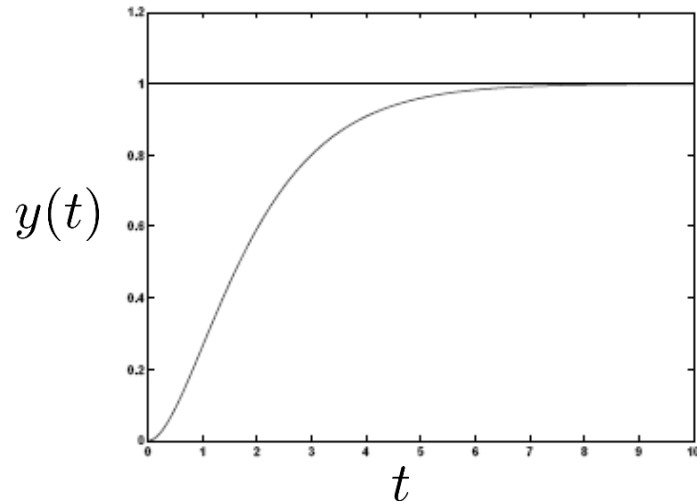
- Karakteristisk ekvation $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$



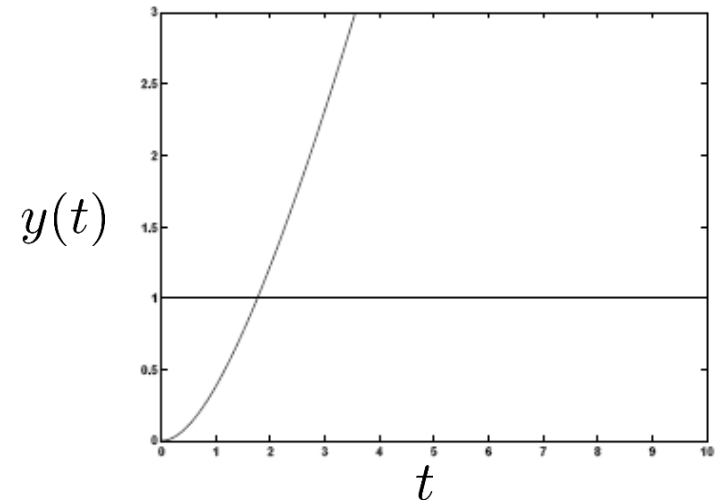
Lösningens principiella utseende

$$y(t) = \frac{1}{a_2} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

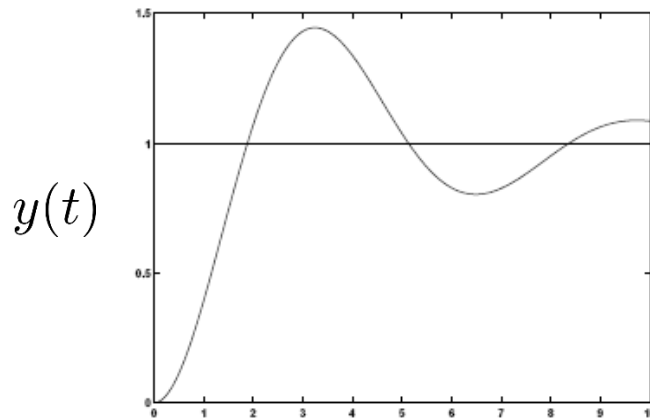
λ reella och negativa:



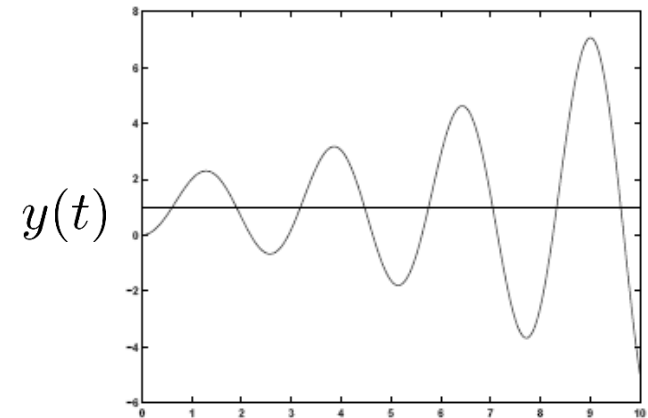
λ reella och positiva:



λ komplexa och $Re(\lambda) < 0$:



λ komplexa och $Re(\lambda) > 0$:





Laplaceformen

- Definition:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- Exempel: $f(t) = 1$, $t \geq 0$ (steg)

$$F(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$



Egenskaper

- (i) Entydighet $f(t) \Leftrightarrow F(s)$. Tabell!
- (ii) Linjäritet $\mathcal{L} [af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$
- (iii) Derivering: $\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = sF(s) - f(0)$
Allmänt: $\mathcal{L} \left[\frac{d^n f}{dt^n} \right] = s^n F(s)$ om $f(0) = \dot{f}(0) = \dots = 0$
- (iv) Integration $\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s)$
- (v) Faltning $\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] = F(s)G(s)$
- (vi) Slutvärdesatsen:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
om slutvärdet existerar



Exempel med Laplacetransformen

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = u(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad u(t) = 1$$

$\Downarrow \mathcal{L}$

$$s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_2 Y(s) = \frac{1}{s}$$

\Downarrow

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + a_1 s + a_2)} = \frac{1}{s(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$ (tabell)

$$y(t) = \frac{1}{a_2} + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

(med c_1, c_2 valda så att $y(0) = \dot{y}(0) = 0$)



Laplacetransformen

- Känns detta svårt eller obekant?
- Repetitionsseminarium: Laplacetransformen
- Torsdag 6 november kl. 13-15 i sal V34

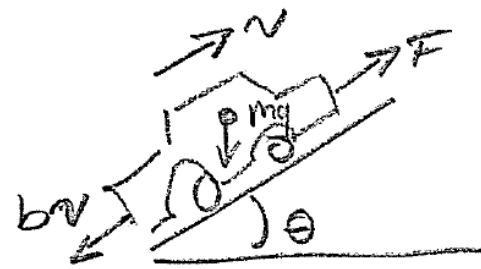


Frågor

1. Hur ser insvängningsförloppet av stegsvar ut?
2. Kommer stegsvaret alls att svänga in? (Är det återkopplade systemet *asymptotiskt stabilt*?)
3. Finns det enklare sätt att räkna ut statiska reglerfel?

Svar: 1-2: Studera differentialekvation i detalj
1-3: Använd Laplacetransformen

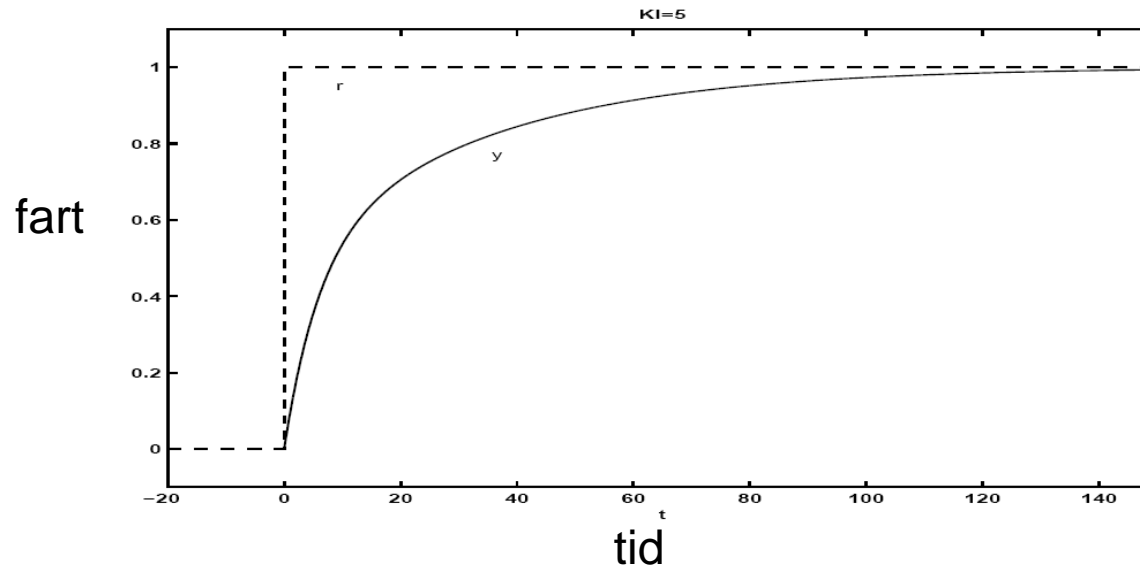
Exempel igår: Farthållning av bil



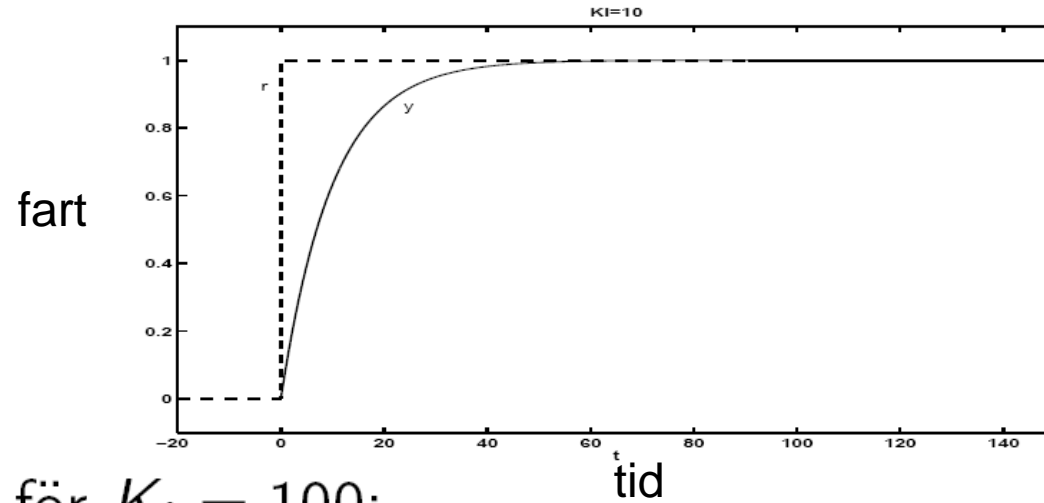
- Bilens dynamik $\dot{v}(t) = \frac{1}{m}F(t) - g \sin \theta(t) - \frac{b}{m}v(t)$
- Reglerfelet $e(t) = r(t) - v(t)$
- PI-regulator $F(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$
- K_P och K_I valbara parametrar. Hur beror stegsvaren på dem?
- $K_I = 0$ ger statiskt fel ($\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \neq 0$, visade vi på Fr11)

Farthållning av bil

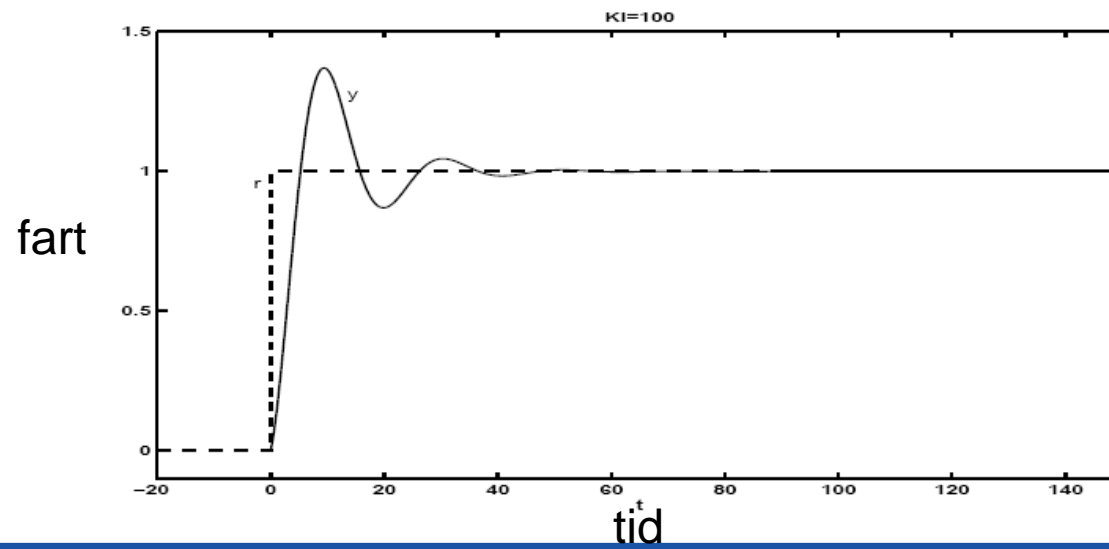
- Studera fallet $m = 1000$ och $b = 100$.
- Betrakta utsignalen $y(t)$ (hastigheten) för steg i börvärdet $r(t)$ (referenshastighet) för olika K_I . Anta $K_P = 100$.
- Stegsvvar för $K_I = 5$:



- Stegsvvar för $K_I = 10$:



- Stegsvvar för $K_I = 100$:





Quiz

(1) En funktion $y(t)$ har Laplacetransformen

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Vad är funktionens värde när $t \rightarrow \infty$

- a) 0
 - b) 1
 - c) $\frac{1}{2}$
 - d) ∞
-

(2) En funktion $y(t)$ har laplacetransformen

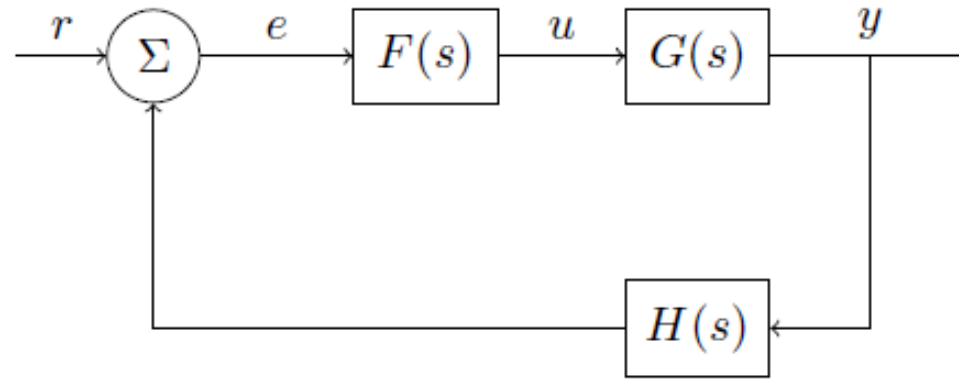
$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Vad är funktionens utsignal när $t \rightarrow \infty$

- a) 0
- b) 1
- c) ∞
- d) Det går inte att säga med de kunskaper som kursen lärt ut.

Quiz

(3)



Vilket alternativ beskriver överföringsfunktionen mellan r och e ?

(a) $\frac{1}{1 + FGH}$

(b) $\frac{1}{1 - FGH}$

(c) $\frac{1}{FGH - 1}$

(d) 1