November 7, 2014. Föreläsning 14.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- determinant

1. Lt A vara en $n \times n$ matris. Vi kan skriva A på följande sätt:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

där R_i betecknar i-te rad av A och C_j betecknar j-te kolonn av A.

2. **Definition.** Determinant är en funktion som till varje $n \times n$ matris A ordnar ett tal $\det A$ så att:

(1) $\det I_n = 1$;

(2) $\det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + R_i' \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i' \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$;

(3) $\det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \lambda R_i \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$

(4) $\det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$.

3. **Proposition.** Determinanten har följande egenskaper:

(1) $\det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = 0$. Om två rader är lika, då determinanten är 0;

(2) $\det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + \lambda R_j \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$ för $i \neq j$;

(3) $\det \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = 0$. Om en rad är 0, då determinanten är 0;

(4) $\det A = \det A^T$;

(5) $\det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \vec{C}_i + \vec{C}_i' & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix} =$
$= \det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \vec{C}_i & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \vec{C}_i' & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix}$.

(6) $\det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \lambda \vec{C}_i & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \vec{C}_i & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix}$.

(7) $\det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \vec{C}_i & \cdots & \vec{C}_j & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \vec{C}_j & \cdots & \vec{C}_i & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix}$

(8) $\det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \vec{C}_i & \cdots & \vec{C}_i & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix} = 0$

(9) $\det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \vec{C}_i + \lambda \vec{C}_j & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \vec{C}_i & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix}$ för $i \neq j$.

(10) $\det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \cdots & \vec{0} & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix} = 0$.

(11) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

4.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \qquad \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \qquad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

5.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

6. $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a+0 & b+0 \\ 0+c & 0+d \end{bmatrix} = ad - bc$

7.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11}+0+0 & a_{12}+0+0 & a_{13}+0+0 \\ 0+a_{21}+0 & 0+a_{22}+0 & 0+a_{23}+0 \\ 0+0+a_{31} & 0+0+a_{32} & 0+0+a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{21}a_{12}a_{33} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+a_{21}a_{32}a_{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{31}a_{12}a_{23} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{31}a_{22}a_{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

8. Uppgift. Beräkna

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Vektor produkt som determinant.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_3 - v_3w_1 \end{bmatrix} = (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{e}_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{e}_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{e}_3$$

$$\det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & v_1 & w_1 \\ \vec{e}_2 & v_2 & w_2 \\ \vec{e}_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = v_2w_3\vec{e}_1 + v_3w_1\vec{e}_2 + v_1w_2\vec{e}_3 - v_2w_1\vec{e}_3 - v_3w_2\vec{e}_1 - v_1w_3\vec{e}_2 =$$

$$= (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{e}_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{e}_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Kom ihåg att :

(1) $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ är ortogonal till båda $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$;

(2) längden av vektor produkten är lika med arean av parallellogramen som har $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ som sidor;

(3) vektorer $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ är parallella om och endast om $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$.

10. **Uppgift.** Bestäm en vektor som är ortogonal till båda $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkan arean av parallellogramen som har $\vec{v}$ och $\vec{w}$ som sidor.

11. **Uppgift.** Beräkna:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. **Proposition.** $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Determinanten av en triangel matris kan beräknas genom att multiplicera alla koefficienterna på diagonalen.

13. **Uppgift.** Beräkna determinanten av:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 13 & 3 \\ 1 & 0 & 17 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$