November 11, 2014. Föreläsning 15.

SF1624 CELTE

Innehållet:

- determinanter.

1. **Proposition.**
   - Låt A vara $n \times n$ matris. Då $\det(A) = \det(A^T)$.
   - $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Determinanten av triangel matris kan beräknas genom att multiplicera alla koefficienterna på diagonalen.
   - Låt A vara $n \times n$matris som genom följande operationer kan transformeras till triangel matris B:
     (1) $R_i \mapsto R_i + \alpha R_j$ $(i \neq j)$
     (2) $C_i \mapsto C_i + \alpha C_J$ $(i \neq j)$
     (3) $R_i \mapsto R_j$ och $R_j \mapsto R_i$
     (4) $C_i \mapsto C_j$ och $C_j \mapsto C_i$
     Då $\det(A) = (-1)^{\text{antalet av transformationer (3) och (4)}} b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}$.

2. **Uppgift.** Beräkna determinanten av:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 13 & 3 \\ 1 & 0 & 17 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

3. **Uppgift.** Beräkna:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. **Proposition.** Låt A vara $n \times n$ matris.
   (1) $\det A = 0$ om och endast om kolonnerna är linjer beroende.
   (2) $\det A = 0$ om och endast om rang av A är mindre en n.
   (3) $\det A = 0$ om och endast om $\ker(A) \neq 0$.
   (4) $\det A \neq 0$ om och endast om kolonnerna är linjer oberoende.
   (5) $\det A \neq 0$ om och endast om kolonnerna bildar en bas till $\mathbb{R}^n$.
   (6) $\det A \neq 0$ om och endast om rank av A är lika med n.

5. **Uppgift.** Hitta alla värde av a så att följande vektorer är linjär oberoende:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

6. **Proposition.** Låt A vara $n \times n$ matris. Om vi ta bort i-te rad och j-te kolonn, får vi en $(n-1) \times (n-1)$ som vi betecknar med A_{ij}.

(1) Välj en i-te rad.

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$$

(2) Välj en j-te kolonn.

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj})$$

7. **Uppgift.** Beräkna

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. **Proposition.**

(1) $n \times n$ matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$.

(2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är inverterbar om och endast om $ad - bc \neq 0$. I så fall

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

är inversen till A.

(3) Kolonnerna av en $n \times n$ matris A bildar en bas i $\mathbb{R}^n$ om och endast om $\det(A) \neq 0$.

(4) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(5) Om $n \times n$ matris A är inverterbar, då $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

(6) $\left|\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|$ är arean av parallellogram i planet som spans av vektorer $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

(7) $\left|\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|$ är arean av parallellogram i planet som spans av vektorer $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$.

(8) $\left|\det \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \vec{C}_3 \end{bmatrix}\right|$ är volymen av parallellogram i rummet som spans av kolonnerna $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$, och $\vec{C}_3$.

(9) $\left|\det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}\right|$ är volymen av parallellogram i rummet som spans av raderna R_1^T, R_2^T, och R_3^T.

9. **Uppgift.** Undersök om $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ är inverterbar. Om det är inverterbar bestäm inversen till A.

10. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$ and $\det(BA)$.

11. **Uppgift.** Beräkna arean av parallellogram som spans av $\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

12. **Uppgift.** Beräkna volumen av parallellogram i rummet som spans av $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$.