KTH Datavetenskap
och kommunikation

DT1130 Spektrala transformer
Tentamen 140115

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift maximalt ger 4 p. Normalt gäller följande betygsgränser: **E: 9 p, D: 11.5 p, C: 14 p, B: 16 p, A: 18 p**
Tillåtna hjälpmedel: räknare, formelblad (bifogat)

Lycka till!

1

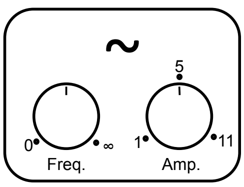
Nigel har kopplat in en tongenerator till en spektrumanalysator. Spektrumanalysatorn är inställd så att den samplar signalen med $f_s = 32kHz$ utan anti-vikningsfilter och berkänar signalens spektrum (FFT i belopp) och presenterar detta på en display. Dvs x-axeln representerar frekvens och y-axeln representerar amplitud. När tongeneratorn slås på visar spektrumdisplayen ett lodrät ”spik”.

Tongeneratorn (se figur 1) har två rattar, en är märkt *Frequency* och en är märkt *Amplitude*.

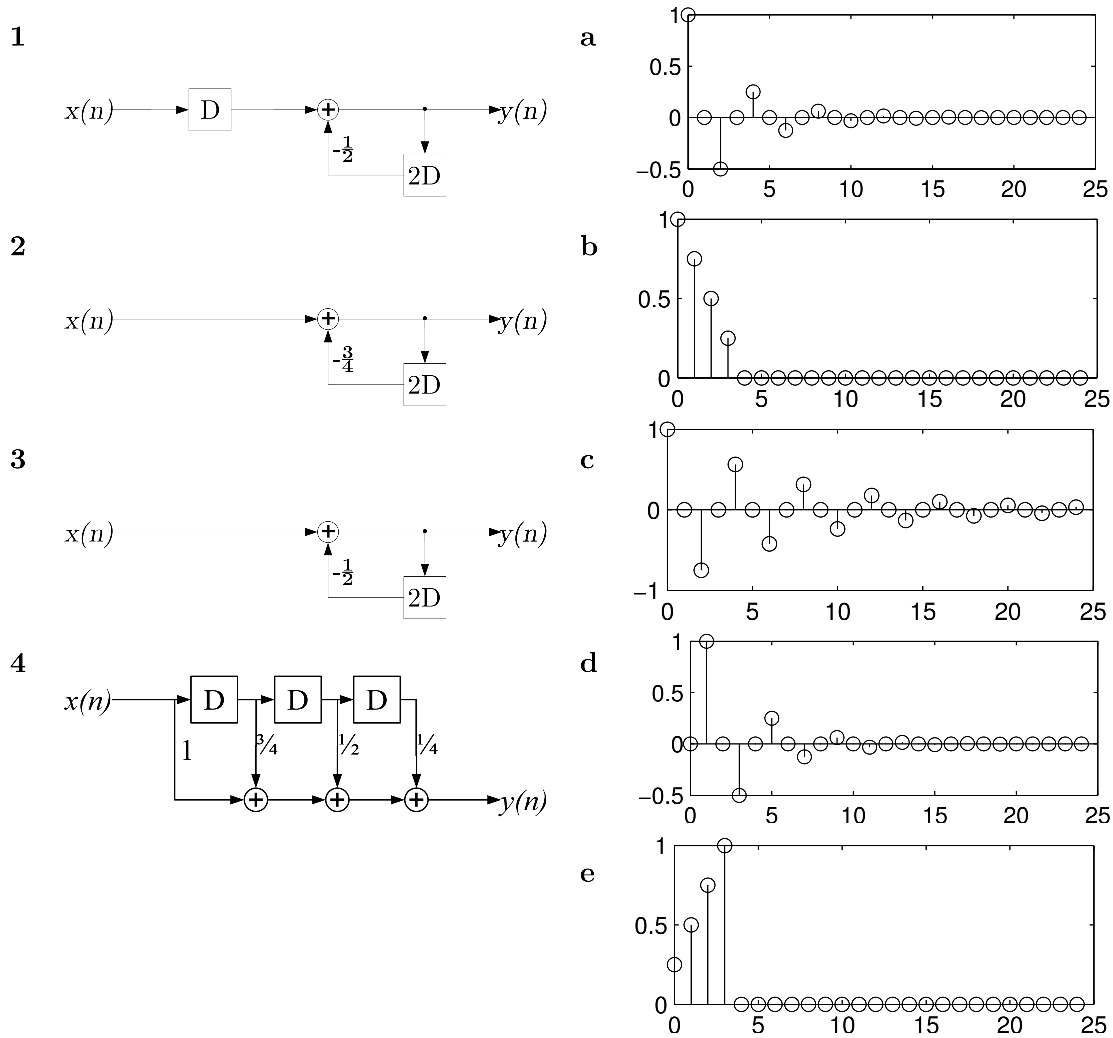
a Nigel börjar vrida *Frequency*-ratten uppåt från noll-läget. Spiken rör sig till en början uppåt längs x-axeln, men plötsligt upptäcker Nigel till sin förvåning att spiken rör sig *nedåt* trots att han alltjämt skruvar ratten *uppåt*. Förklara för Nigel (som inte läst DT1130) vad som troligtvis händer, och ange vid vilken frekvens spiken börjar röra sig nedåt (*2 p*).

b Nigel vrider tillbaka *Frequency*-reglaget till strax ovanför noll-läget och övergår till att skruva på *Amplitude*-ratten. När han ökar den över en viss nivå dyker nya spikar upp i spektrudisplayen. Ju högre han vrider ratten, desto fler och högre blir spikarna. Beskriv för Nigel vad det är som händer med signalens vågform, samt hur detta påverkar spektrum. (*1 p*)

c Förklara var dessa nya spikar bör dyka upp längs x-axeln, och spekulera kring hur höjderna på spikarna borde förhålla sig till varandra sig när man ”krämar på” riktigt mycket. (*1 p*)



Figur 1. Nigel’s tongenerator



Figur 2. Filter och impulssvar för ihopparande.

2

I figur 2 ser du ett antal filterscheman och ett antal impulssvar. Para ihop rätt schema med rätt impulssvar, med motivering. Observera att det blir ett impulssvar över. *(1p/ korrekt par)*

3

Ett antal okända filter ska undersökas. Varje filter matas med en impuls $x(n) = \delta(n)$ och utsignalen $y(n)$ studeras. Bestäm överföringsfunktionen $H(z)$ för vart och ett av filtren på enklaste möjliga form, givet utsignalen $y(n)$ (*1p stycket*):

a $$y(n) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad n < 0 \\ 1 & \text{om} \quad n \quad \text{jämn} \\ -1 & \text{om} \quad n \quad \text{udda} \end{cases}$$

b $$y(n) = 2^{-n}u(n)$$

c $$y(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$$

d $$y(n) = sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u(n)$$

4

Diskret cosinustransform (DCT) är vanligt förekommande i bildbehandling och kompression, och används som bekant bl.a. i JPEG-algoritmen. I figur 3 ser du ett antal $8x8$-matriser. De till vänster skulle t.ex. kunna motsvara block av pixlar i en bild. Till höger finns tvådimensionella DCT-transformer (i absolutbelopp) av dessa block. Ditt jobb är nu att para ihop pixelblocken med rätt transformblock. Du måste motivera klart och tydligt för att få poäng. Observera att det blir ett transformblock över. Höga värden motsvaras av mörk färg i bilderna. *(1p/ korrekt par)*

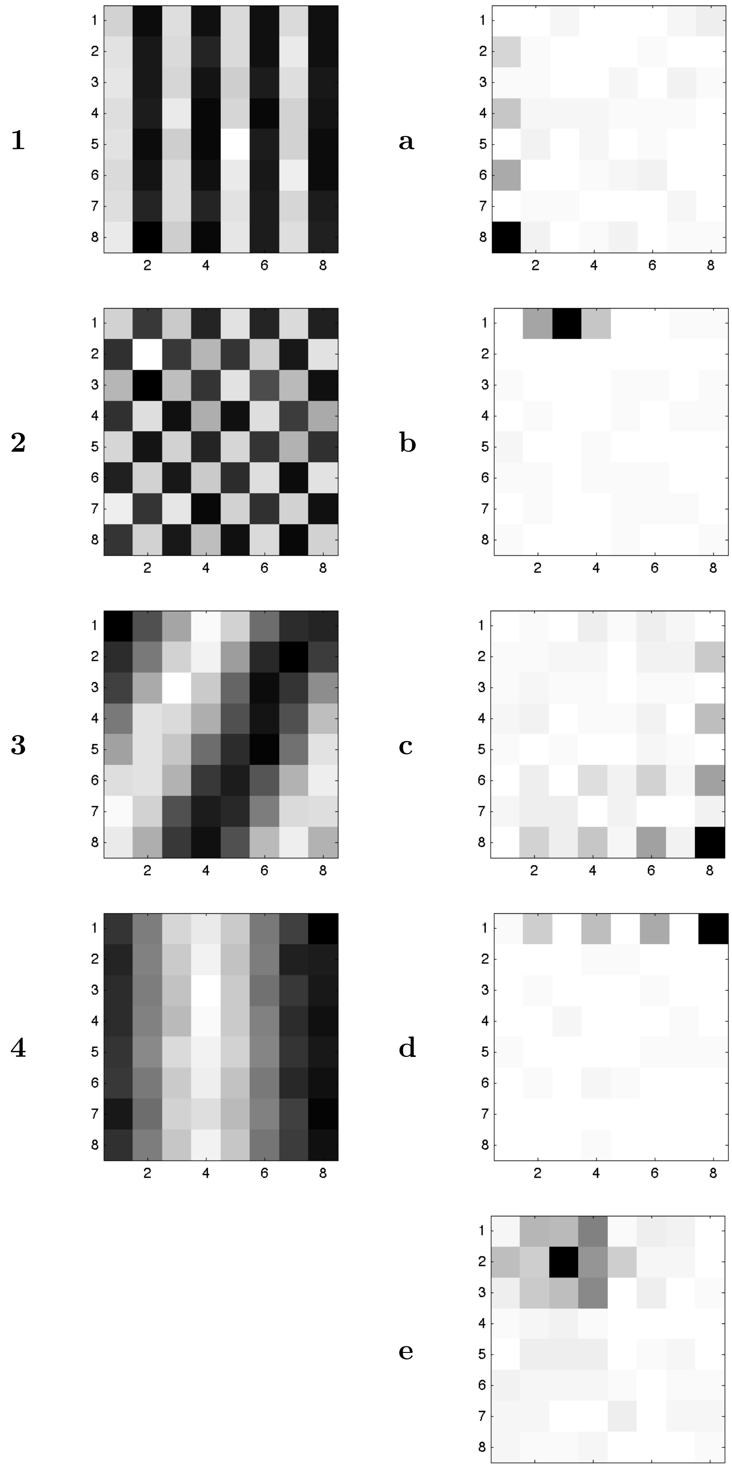
5

Betrakta filtret

$$y(n) = x(n) + \alpha x(n - K)$$

där K är ett positivt heltal, och α är ett reellt tal (kan vara negativt).

Ta fram filtrets överföringsfunktion $H(z)$ och visa att dess nollställen ligger jämnt fördelade på en cirkel med radien $|\alpha|^{\frac{1}{K}}$ i z-planet (med centrum i origo). Skissa även filtrets frekvenssvar $|H(\omega)|$ *(4p)*



Figur 3. Para ihop blocken till vänster med rätt 2D DCT-transform!

Lösningar

1

a

Att spiken börjar röra sig åt motsatt håll betyder att det har uppstått vikning, dvs signalen från tongeneratorn befinner sig utanför basbandet. Eftersom spektrumanalysatorn är inställd att inte använda anti-vikningsfilter så dyker signalen upp som en reflektion i basbandet. vikningen uppstår när frekvensen överstiger halva samplingsfrekvensen, dvs vid 16 kHz.

b

Det som händer när Nigel ökar amplituden är att icke-linjär distorsion uppstår, t.ex. p.g.a. klippning i ingången till spektrumanalysatorn. Vågformen som ursprungligen är en ren sinus (endast en spik i spektrum) blir tillplattad/klippt i topparna, detta leder till att nya deltoner dyker upp (flera spikar i spektrum).

c

Vad vi vet om deltonernas lägen är först och främst att en periodisk vågform har ett *harmoniskt* spektrum dvs deltonerna ligger på jämna multipler av grundtonen (jmfr Fourierserie). När man "krämar på" amplituden kan man tänka sig att klippningen i extremfallet resulterar i en ren fyrkantvåg. Inbördes styrkan för deltonerna ges då av fyrkantvågens fourierserie-koefficienter (se formelsamling): dvs endast udda deltoner, och dessas höjd avtar med $\frac{1}{k}$ där k är multipel av grundtonsfrekvensen.

2

1 Det är en tvåpolsresonator med $H(z) = \frac{z}{z^2+0.5}$ vilket ger poler i $z = \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$, vilket motsvarar vinkelfrekvensen $\omega = \pi/2$. Detta är en dämpad svängning med perioden 4 sampel, vilket stämmer på impulssvar a, c och d. Det som skiljer dessa åt är långsammare avklingning för c samt att d är fördröjd ett sampel jämfört med a. Vi kan också notera att filter 3 är identiskt med filter 1 så när som på den inledande fördröjningen i filter 1. Alltså passar *filter 1 och impulssvar d.*

2 som ovan men med polerna $z = \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Större polradie än 1 vilket ger långsammare avklingning, alltså *2 och c.*

3 Som 1 men utan fördröjning. *3 och a*

4 Impulssvaret för ett icke-återkopplat filter är lika med dess koefficienter $h(n) = a_n$, vilket ger *4 och b*

3

a

Impulssvaret kan skrivas $h(n) = (-1)^n u(n)$. Z-transform #4 i formelsamlingen med $a = -1$ ger

$$H(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$

b

Z-transform #4 i formelsamlingen med $a = 2^{-1}$ ger

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

c

Z-transform #2 i f.s. ger

$$H(z) = z^0 - z^{-2} = 1 - z^{-2} = \frac{z^2 - 1}{z^2}$$

d

Använd Euler:

$$h(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u(n) = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}n}}{2j}u(n) + \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2j}u(n)$$

z-transform #4 på varje e-term ($a = e^{j\frac{\pi}{4}}$ resp $a = e^{-j\frac{\pi}{4}}$) ger

$$H(z) = \frac{1}{2j}\frac{1}{1 - e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{1}{2j}\frac{1}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}$$

sätt på samma bråkstreck:

$$H(z) = \frac{1}{2j}\frac{z(z - e^{-j\frac{\pi}{4}}) - z(z - e^{j\frac{\pi}{4}})}{(z - e^{j\frac{\pi}{4}})(z - e^{-j\frac{\pi}{4}}) =}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z}{z^2 - \sqrt{2}z + 1}$$

4

Den tvådimensionella DCT-transformen beskriver frekvensinnehållet i pixelblocket. Raderna i transformblocket motsvarar frekvenser i vertikalled i pixelblocket, där översta raden motsvarar frekvensen 0. Kolumnerna motsvarar följaktligen frekvens i horisontalled, där första kolumnen är frekvensen 0.

1 hög horisontell frekvens -> bör finnas ett högt värde i en kolumn långt till höger. Vertikala frekvensen noll -> bör finnas högt värde på översta raden. Detta stämmer perfekt på *d*.

2 maximal frekvens både i horisontal- och vertikalled. Högraste kolumnen, sista raden -> *c*.

3 relativt långsam horisontell frekvens (ungefär samma som i 2) alltså en kolumn i vänstra halvan. Även en långsam vertikal frekvens, dock inte noll, alltså andra eller 3:e raden. Detta verkar stämma på *e*.

4 Låg horisontell frekvens, dock inte noll. -> en kolumn någonstans i början men inte den första. Vertikala frekvensen noll -> översta raden. Detta stämmer på *b*.

5

$H(z) = \frac{z^K+\alpha}{z^K}$ har nollställen då $z^K = -\alpha$

$\alpha > 0$ ger

$$z^K = |\alpha| e^{j\pi} e^{j2m\pi}$$

vilket har rötterna

$$z = |\alpha|^{\frac{1}{K}} e^{j\pi(1+2m)/K}$$

där m är ett heltal.

Om $\alpha < 0$ får vi istället

$$z^K = |\alpha| e^{j2m\pi}$$

vilket har rötterna

$$z = |\alpha|^{\frac{1}{K}} e^{j\pi 2m/K}$$

I båda fallen ligger rötterna på en cirkel med radien $|\alpha|^{\frac{1}{K}}$ och konstant vinkel $2\pi/K$ sinsemellan, vilket skulle bevisas.

De jämnt fördelade nollställena skapar ett frekvenssvar med periodiska toppar och dalar. Filtret kallas därför ett kamfilter. Figurerna nedan visar frekvenssvaret för ett kamfilter med $K = 8$ och $\alpha = 0.5$ respektive $\alpha = -0.5$