



EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 3: Stabilitet, rotort och Nyquistkriteriet





Dagens program

- Laplacetransformen (repetition, slides)
 - Överföringsfunktion, poler och nollställen
 - Stegsvvar
 - Återkopplat system = slutet system
 - Se även [extramaterial](#)
- Rotort (tavla)
- Nyquistkriteriet (tavla)



Laplaceformen

- Laplacetransform av differentialekvation (beg. värde = 0)

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2y(t) = b_0\dot{u}(t) + b_1u(t)$$

$\Downarrow \mathcal{L}$

$$s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_2Y(s) = b_0sU(s) + b_1U(s)$$

\Downarrow

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0s + b_1}{s^2 + a_1s + a_2}}_{G(s)} U(s) = \frac{B(s)}{A(s)} U(s)$$

- $G(s)$ = överföringsfunktion
- Rötter till $A(s) = 0$ kallas *poler* (avgör stabilitet)
- Rötter till $B(s) = 0$ kallas *nollställen* (påverkar snabbhet)



Stegsvar

- Välj enhetssteg som insignal $u(t) = 1, t \geq 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s}$
- Motsvarande utsignal kallas systemets *stegsvar*:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{B(s)}{A(s)} \frac{1}{s}$$

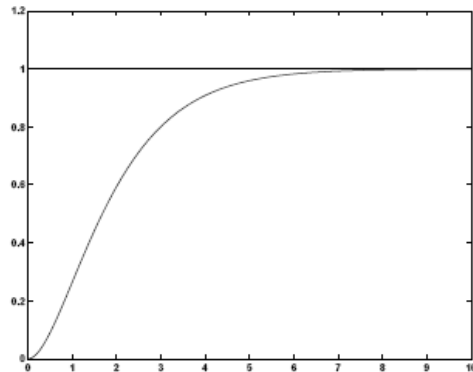
$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t}, \quad \text{där } A(\lambda_k) = 0$$

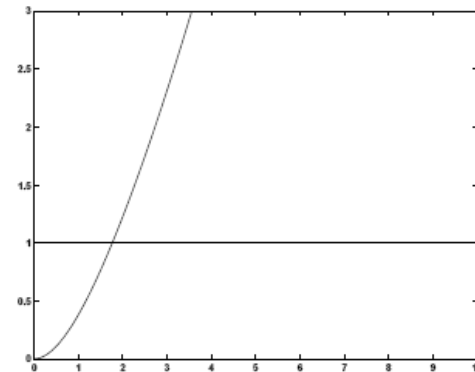
- Asymptotiskt stabilt om och endast om alla $\text{Re } \lambda_k < 0$
- Stora $|\lambda_k|$ ger snabbt stegsvar
- Komplexa poler ger svängningar, som ökar med $\text{Im } \lambda_k / \text{Re } \lambda_k$

Stegsvarens principiella utseende

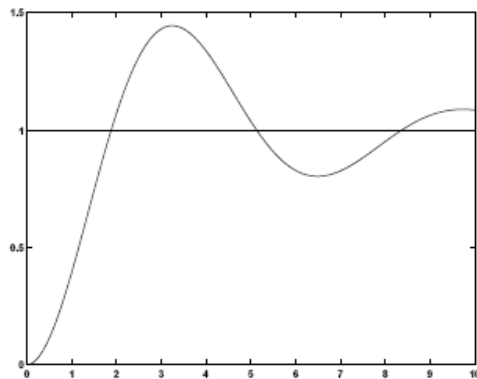
λ reella och negativa:



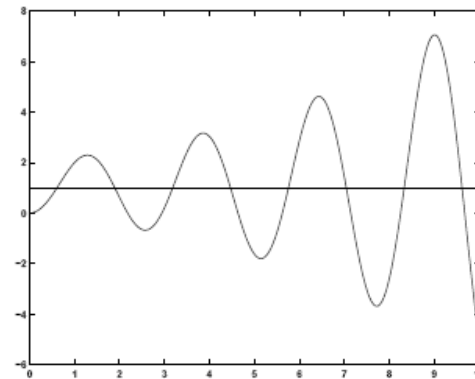
λ reella och positiva:



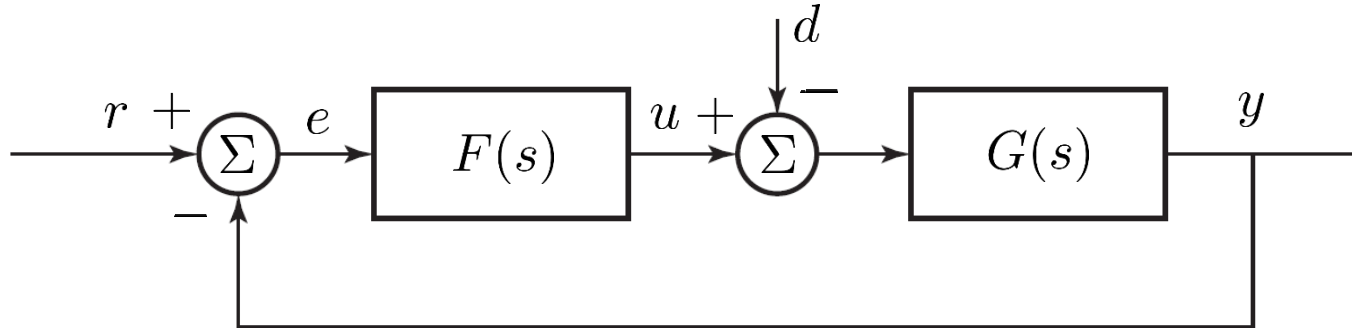
λ komplexa och $Re(\lambda) < 0$:



λ komplexa och $Re(\lambda) > 0$:



Återkopplat system = slutet system



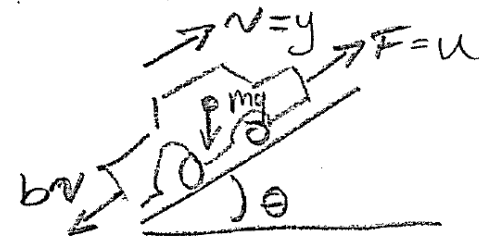
- System = $G(s)$, regulator = $F(s)$
- Slutna systemets överföringsfunktioner:

$$Y(s) = G(s)(F(s)\underbrace{[R(s) - Y(s)]}_{E(s)} - D(s)) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}D(s)$$

- Återkoppling med $F(s)$ flyttar systemets poler!

Farthållning med bil



- Modell av bilen med $m = 1000$, $b = 100$, $\theta = 0$ ($d = mg \sin \theta = 0$)

$$G(s) = \frac{1/m}{s + b/m} = \frac{0.001}{s + 0.1}$$

- Använd PI-regulator

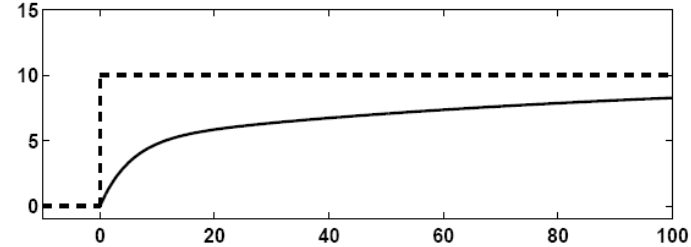
$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \underbrace{\frac{K_P s + K_I}{s}}_{F(s)} E(s)$$

- Slutna systemets överföringsfunktion då $K_P = 100$

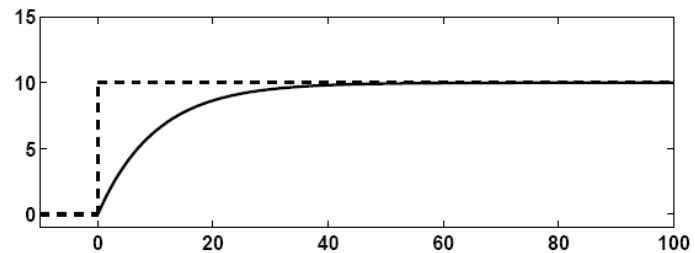
$$Y(s) = \frac{0.1s + 0.001K_I}{s^2 + 0.2s + 0.001K_I} R(s) \quad (D(s) = 0)$$

Simulering av farthållningen

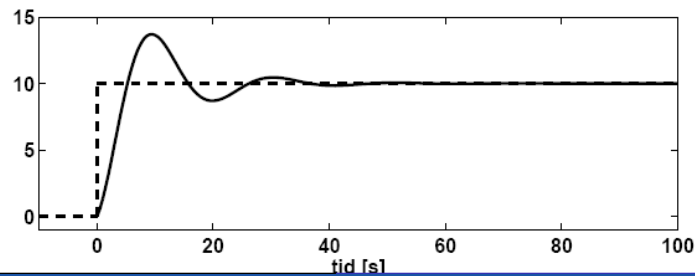
- $K_I = 2 \rightarrow$ poler: $s = -0.01, s = -0.19$



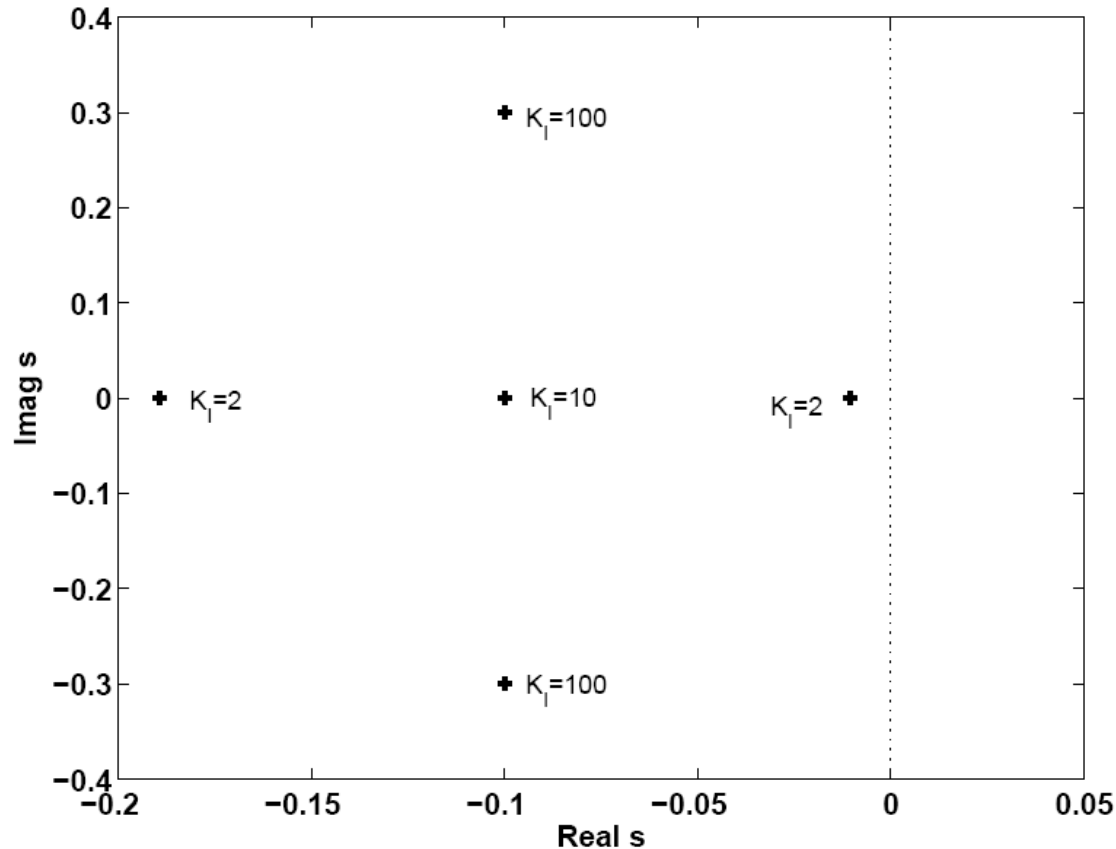
- $K_I = 10 \rightarrow$ poler: $s = -0.1, s = -0.1$



- $K_I = 100 \rightarrow$ poler: $s = -0.1 \pm i0.3$



Slutna systemets poler för olika



- Polernas läge som funktion av $K_I \Rightarrow$ **rotort**
- För vilka K_I hamnar någon pol i högra halvplanet \Rightarrow **Nyquistkriteriet**



Harry Nyquist (1889-1976)



- Född 1889 i Värmland. Emigrerade till USA 1907
- Arbetade för Bell Labs 1917-1954
- Fick IRE (numera IEEE) Medal of Honor för:
“fundamental contributions to a quantitative understanding of thermal noise, data transmission and *negative feedback*”