November 18, 2014. Föreläsning 17.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Olika delrum av en matris.

1. **Definition.** Låt W vara ett delrum i $\mathbb{R}^k$. Vi säger att en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^k$ är ortogonal till W om för varje vektor $\vec{w}$ i W, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Vi anvnder symbolen $W^{\perp}$ att beteckna delmngden av $\mathbb{R}^k$ som består av alla vektorer som är ortogonala till W.

2. **Proposition.** Låt W vara ett delrum i $\mathbb{R}^k$. Då:
   (1) $W^{\perp}$ är också ett delrum in $\mathbb{R}^k$.
   (2) $\dim(W^{\perp}) = k - \dim(W)$.
   (3) $(W^{\perp})^{\perp} = W$, dvs., att W består av alla vektorer som är ortogonala till $W^{\perp}$.

3. **Uppgift.** Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, och $W = \text{span}(\vec{v}, \vec{w})$. Bestäm $W^{\perp}$ och $\dim(W^{\perp})$.

4. Betrakta $n \times k$ matris och sin transpose:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Betrakta kolonnerna och raderna till A (respective raderna och kolonnerna till A^T):

$$\vec{C}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ \vec{C}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \ \vec{C}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}_1^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1k} \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}_2^T = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2k} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\vec{R}_n^T = \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

(1) Betrakta bildrumet $\operatorname{im}(A) = \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$. Då:

$$\dim(\operatorname{im}(A)) = \operatorname{rank}(A) = \text{antalet av pivot i } A$$

De vektorerna bland $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ som motsvarar pivot kolonnerna i A bildar en bas till $\operatorname{im}(A)$.

(2) Betrakta nollrummet $\ker(A)$ (lösningar till $A\vec{x} = \vec{0}$). Då:

$$\dim(\ker(A)) = k - \operatorname{rank}(A) = \text{antalet av fria variabler i } A$$

(3) $\operatorname{span}(\vec{R}_1^T, \ldots, \vec{R}_n^T)$ kallas för radrummet till A. Dimension till radrummet till A är lika med rangen till A, som ges av antalet av pivot.

(4) Radrummet till A är lika med $\ker(A)^\perp$, dvs., radrummet till A består av alla vektorer i $\mathbb{R}^k$ som är ortogonala till $\ker(A)$ eller $\ker(A)$ består av alla vektorer i $\mathbb{R}^k$ som är ortogonala till radrummet till A.

(5) Bildrum till A och till A^T har samma dimension (som är lika med antalet av pivot).

(6) Dimension av nollrummet $\ker(A)$ är lika med $k - \operatorname{rang}(A)$.

(7) Dimension av nollrummet $\ker(A^T)$ är lika med $n - \operatorname{rang}(A)$.

5. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Bestäm $\ker(A)$.
- Bestäm $\dim(\ker(A))$.
- Ge en bas till $\ker(A)$.
- Bestäm $\ker(A)^\perp$.
- Bestäm $\dim(\ker(A)^\perp)$.
- Ge en bas till $\ker(A)^\perp$.
- Bestäm $\operatorname{im}(A)$.
- Bestäm $\dim(\operatorname{im}(A))$.
- Ge en bas till $\operatorname{im}(A)$.
- Ge en bas till radrummet till A.
- Bestäm dimension till radrummet till A.

6. **Uppgift.** Låt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas till $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ och $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)^\perp$. Bestäm $\dim(\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4))$ och $\dim(\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)^\perp)$.