ROYAL INSTITUTE
OF TECHNOLOGY

Nyquistkriteriet

Henrik Sandberg

Extra material till Reglerteknik AK
19 maj 2014

Upplägg

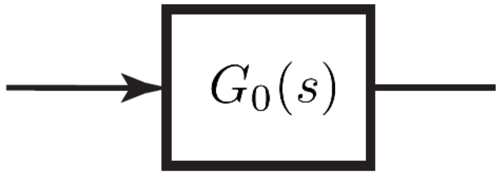
- Harry Nyquist
- Frekvensanalys i sluten loop
- Nyquistkriteriet
- Exempel
- Argumentvariationsprincipen

Harry Nyquist (1889-1976)

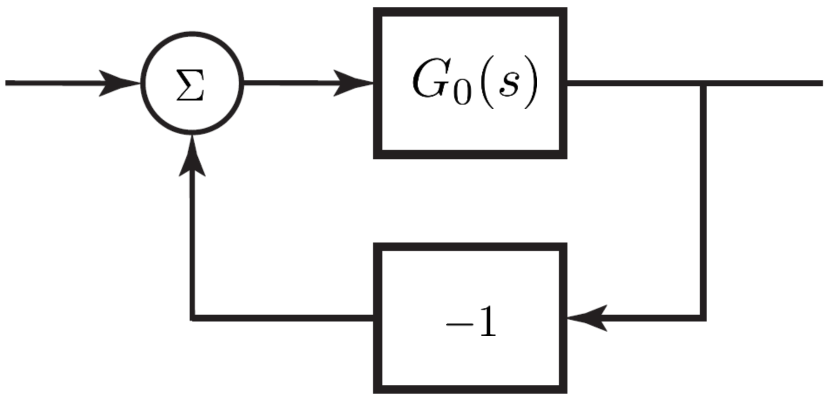
- Född 1889 i Värmland. Emigrerade till USA 1907
- Arbetade för Bell Labs 1917-1954
- Fick IRE (numera IEEE) Medal of Honor för:

"fundamental contributions to a quantitative understanding of thermal noise, data transmission and **negative feedback**"

Öppna och slutna system



$$G_0(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (Q(s), P(s) \text{ polynom})$$



$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{Q(s)}{P(s) + Q(s)}$$

Slutna systemet är (asymptotiskt) stabilt då och endast då alla rötter till

$$1 + G_0(s) = 0 \quad (\Leftrightarrow P(s) + Q(s) = 0)$$

ligger i vänstra komplexa halvplanet $(\mathrm{Re}\ s < 0)$.

Metoder för stabilitetsundersökning

- Direkt lösning
  - Numerisk lösning av karakteristiska ekvationen
- Rotortsmetoden
  - Grafisk lösning av karakteristisk ekvationen
- Algebraiska metoder
  - Routh-Hurwitzkriteriet
- Topologiska metoder
  - **Nyquistkriteriet**

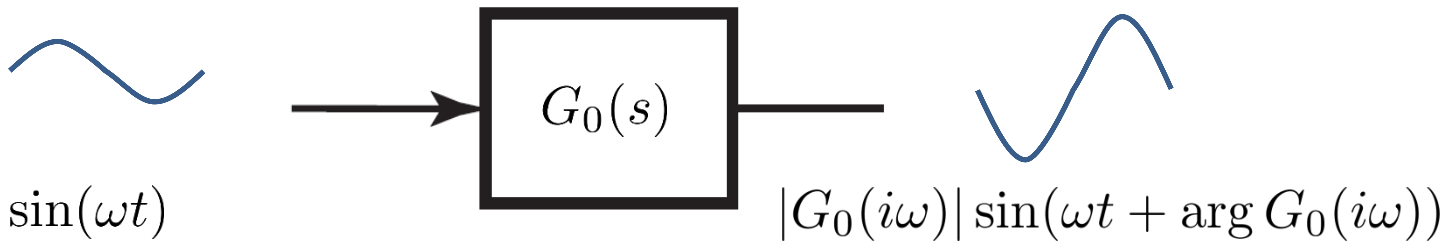
Fördelar med Nyquists metod

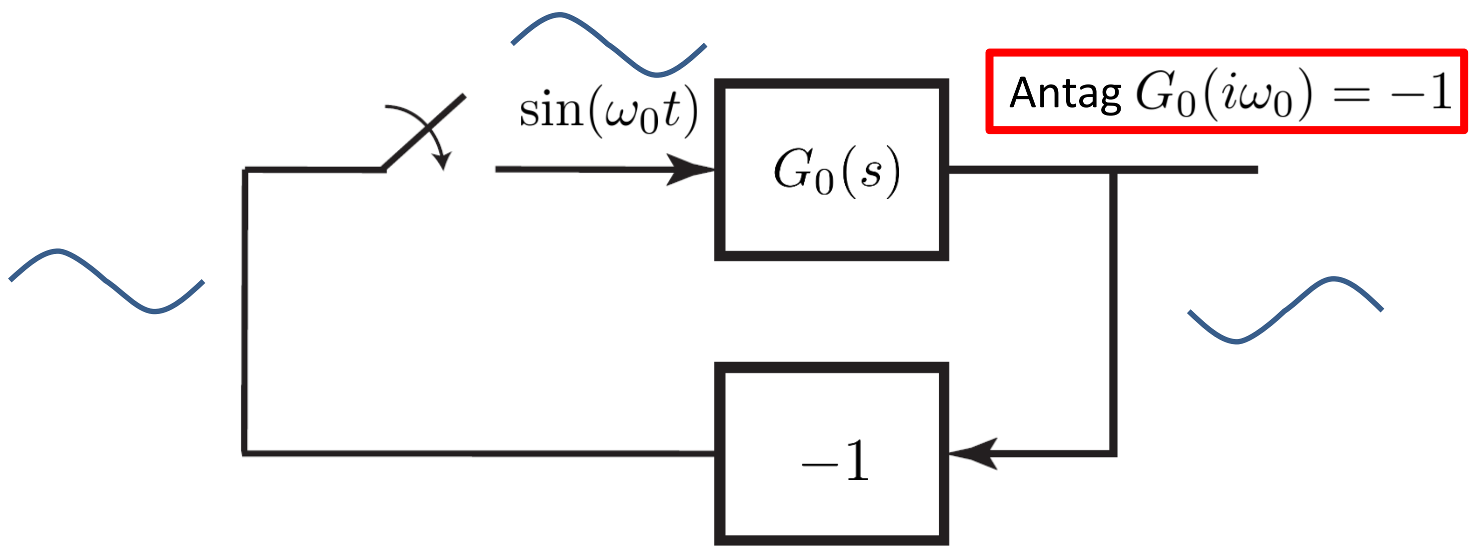
- Behöver bara anta system är linjärt och tidsinvariant
  - Ingen explicit formel för kretsöverföringen $G_0(s)$
  - System givet från mätningar

- Kan hantera icke-rationella överföringsfunktioner
  - Tidsfördröjningar
  - Partiella differentialekvationer (värme, vågor, etc.)

- Bekvämt avgöra slutna systemets stabilitet baserat på öppna systemet
  - Beteende för varierande systemparametrar
  - Stabilitetsmarginaler (”robusthet”)

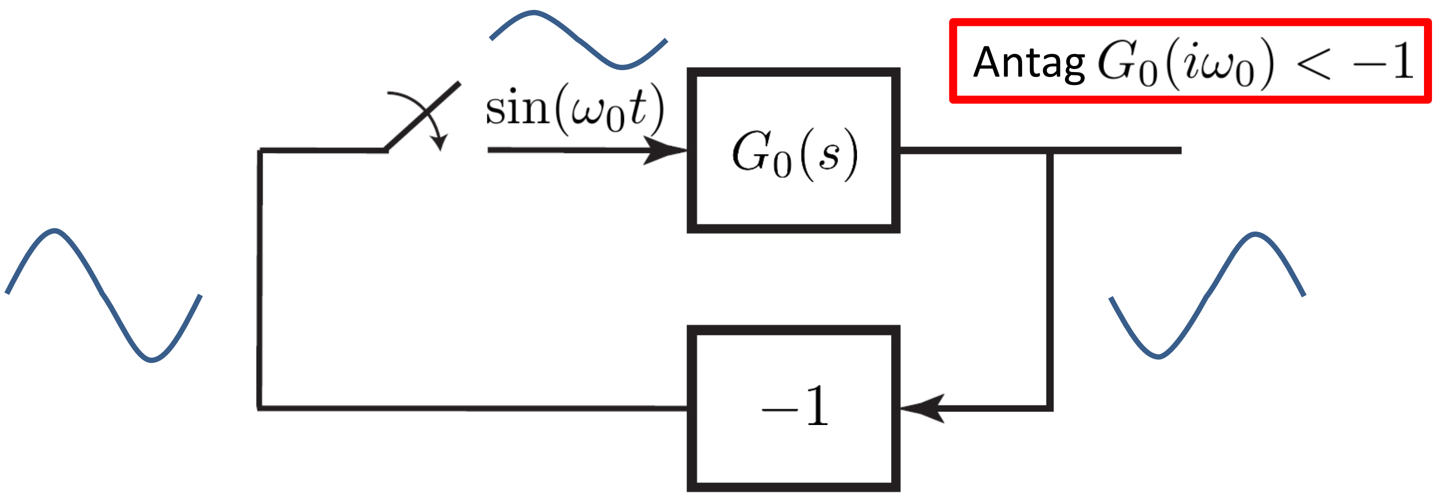
Frekvenssvar





Slutna loopen självsvänger om brytaren sluts

Stabilitet i sluten loop



- Är slutna loopen stabil då brytaren sluts om t.ex.

$$G_0(i\omega_0) = -5 \quad (< -1)?$$

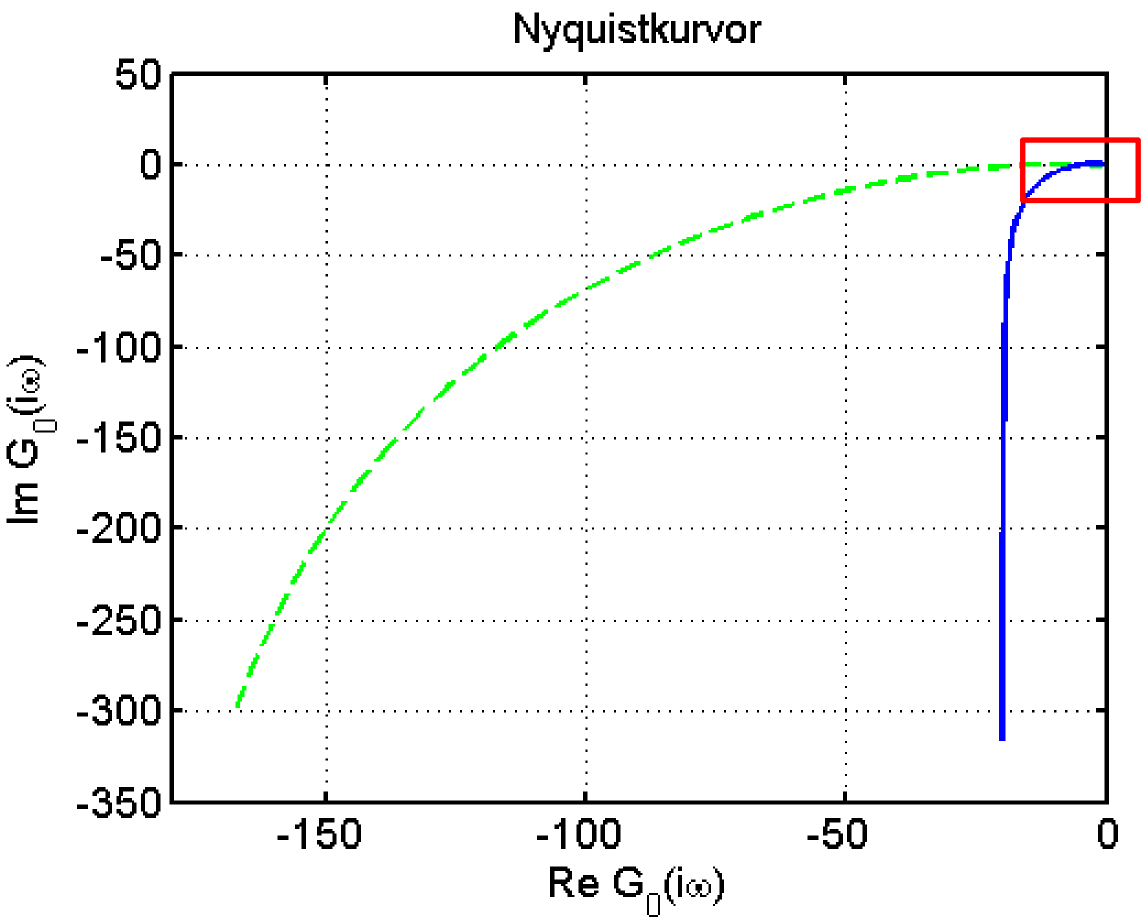
- Intuitionen säger **nej**:

$$-5\sin(\omega_0 t),\ 25\sin(\omega_0 t),\ -125\sin(\omega_0 t), \ldots$$

och är för det mesta rätt, **men** …

Två exempel

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}, \qquad G_0(s) = \frac{3.33(s+6)^2}{s(s+1)^2}$$



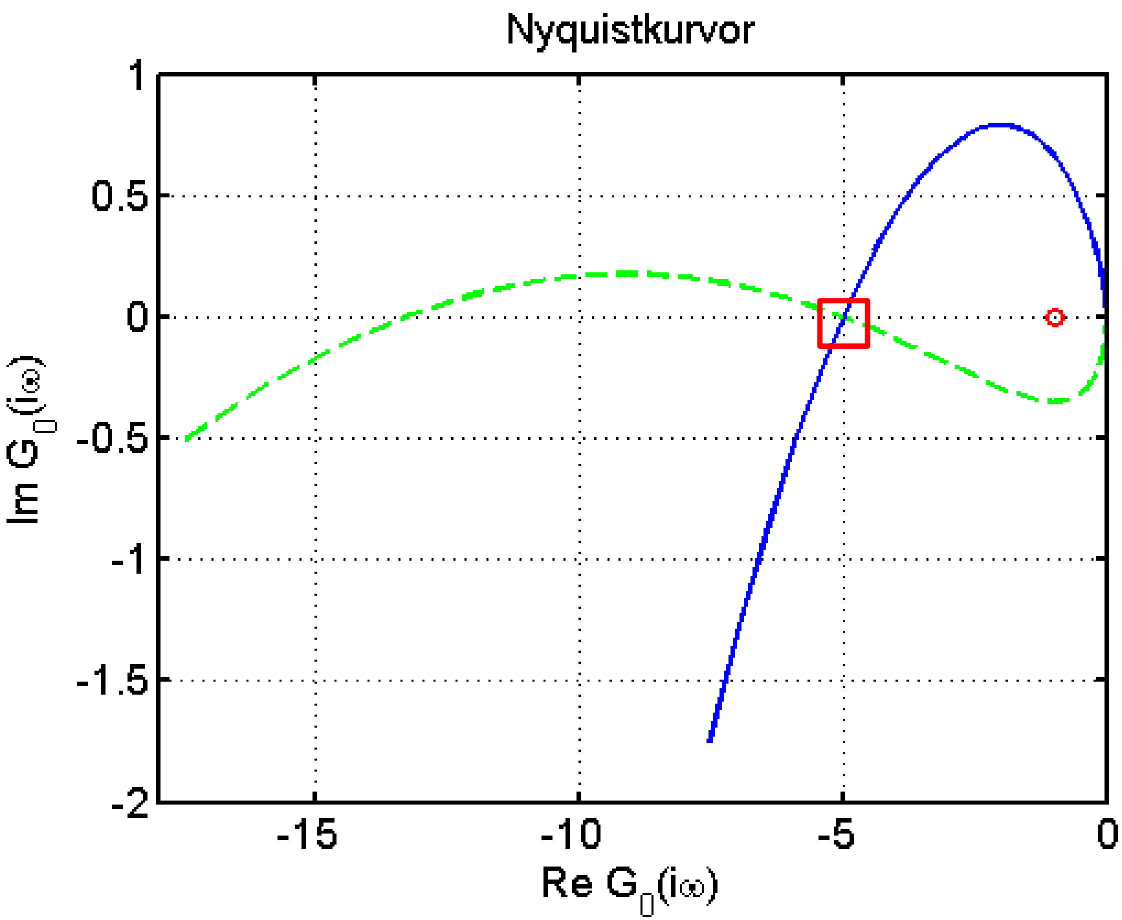
$$G_0(i\omega), \quad \omega \geq 0$$

Finns frekvenser ω_0?

Två exempel

$$\boxed{G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)^2},}$$

$$G_0(s) = \frac{3.33(s+6)^2}{s(s+1)^2}$$

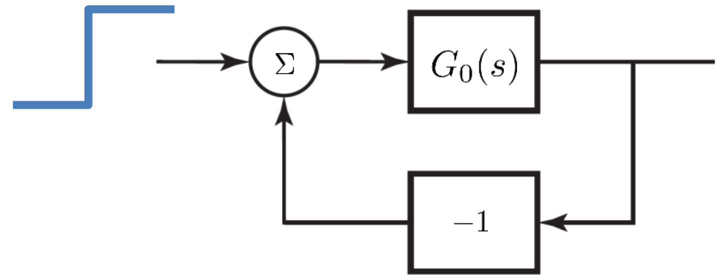


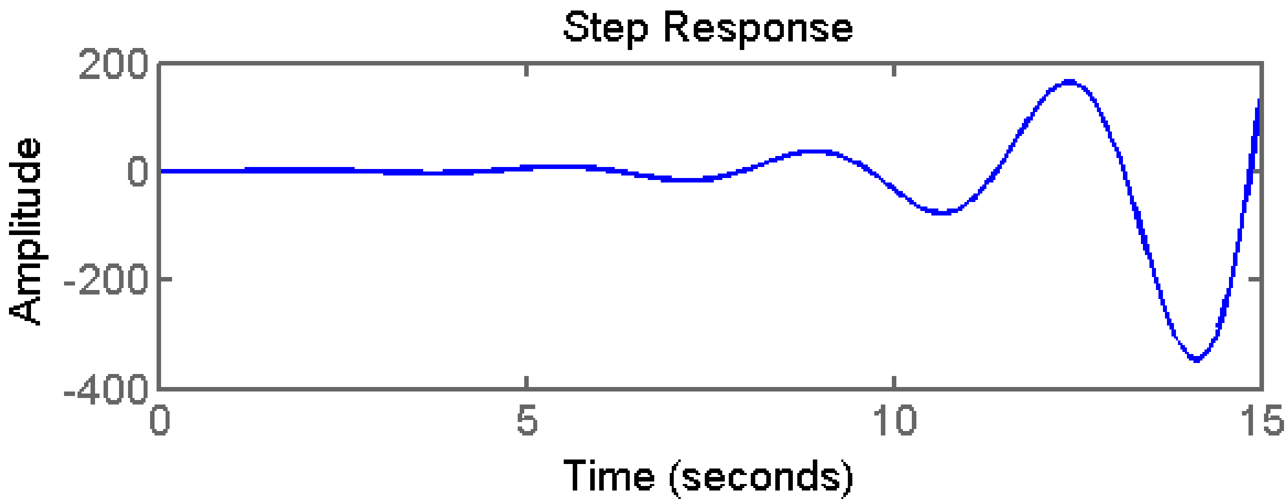
$$\boxed{G_0(\omega_0) \approx -5}$$

$$\boxed{\omega_0 \approx 1 \text{ rad/s}}$$

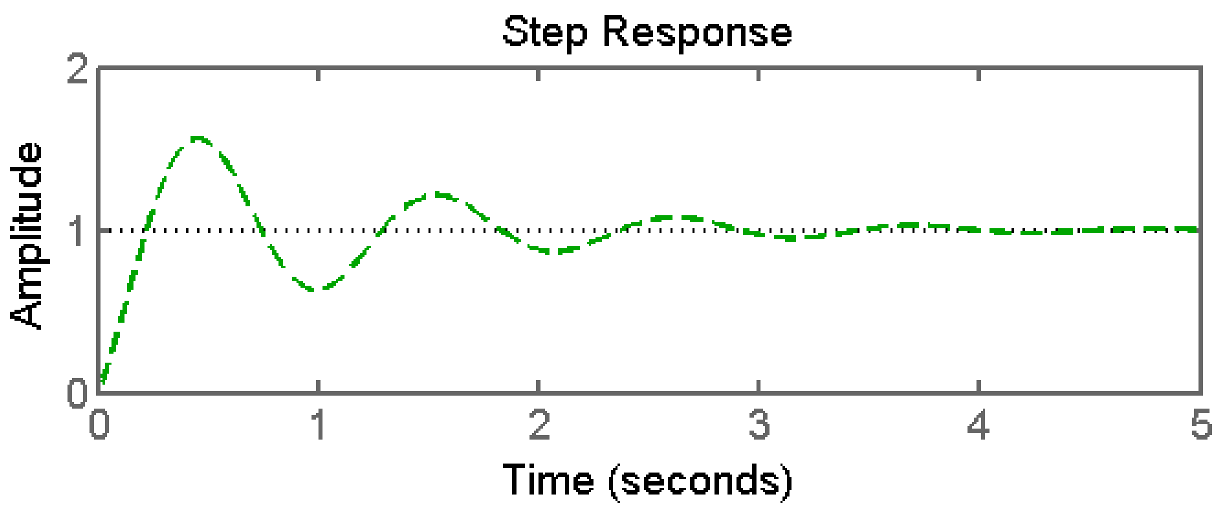
$$\omega_0 \approx 3 \text{ rad/s}$$

Stegsvar för slutna system



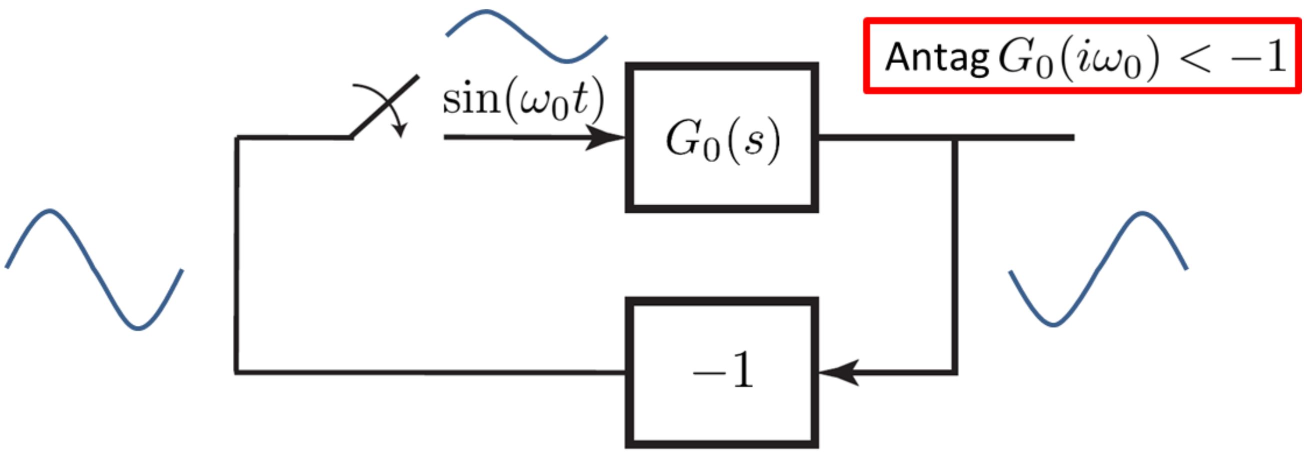


$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}$$



$$G_0(s) = \frac{3.33(s+6)^2}{s(s+1)^2}$$

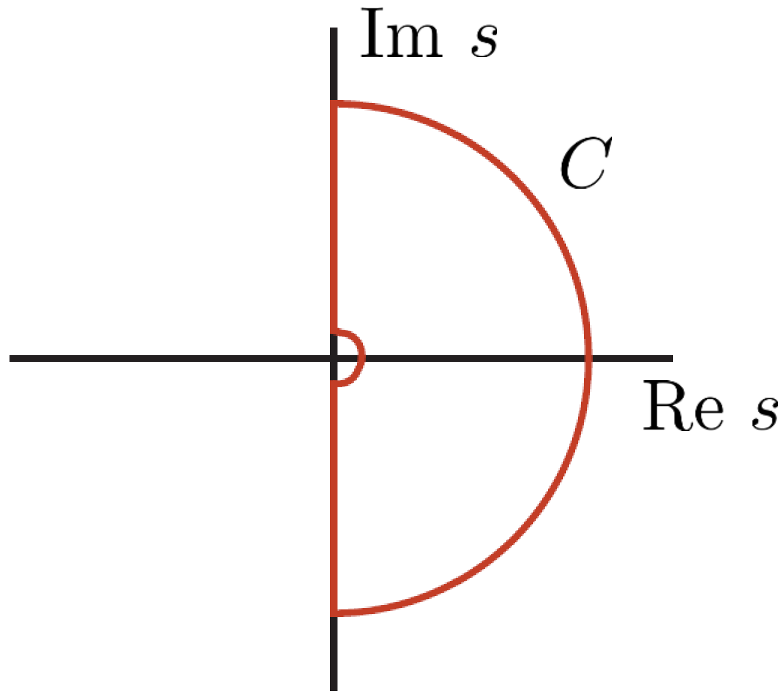
Är slutna systemet stabilt?



- Intuitionen säger ”nej”, **men** *svaret beror på mer än storleken av* $G_0(i\omega_0)$

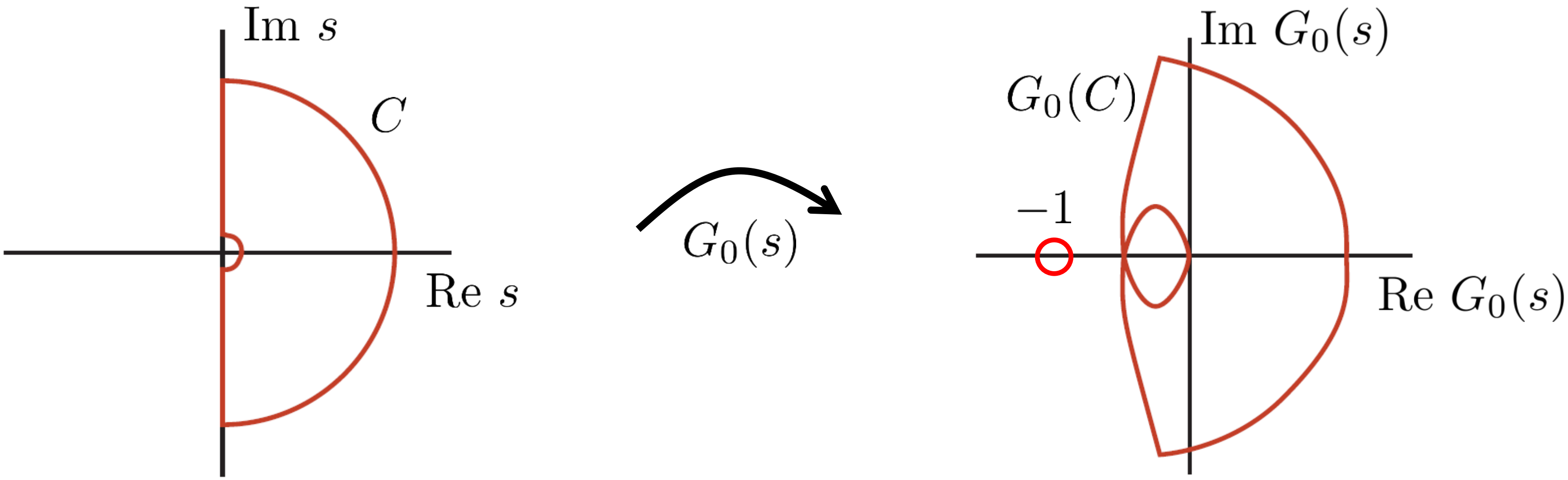
- **Nyquistkriteriet** reder ut vad som gäller!

Kurvan C



- Låt lilla radien gå mot 0 och stora radien mot ∞
- Alla punkter $\mathrm{Re}\ s > 0$ innefattas i gränsen
- Lilla radien hanterar poler i $s = 0$ (integratorer)

Nyquistkriteriet



- Antag $G_0(s)$ ej har några poler som omsluts av C (öppna systemet stabilt med undantag för integratorer)
- Om $G_0(C)$ **ej omsluter** -1 så har alla rötter till

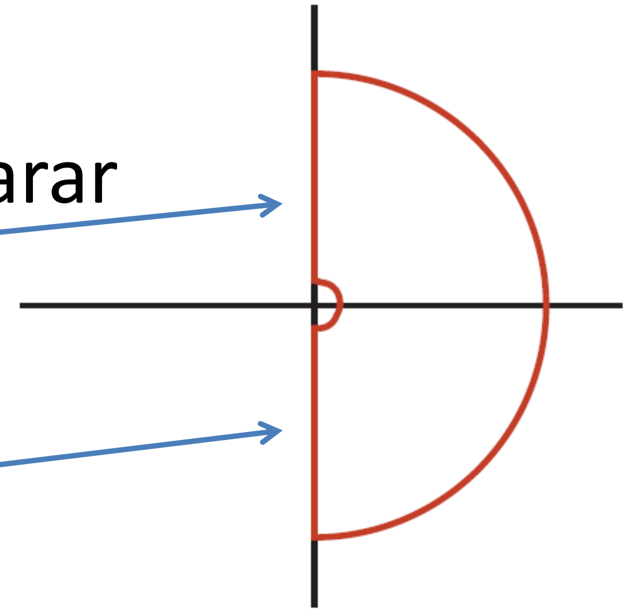
$$1 + G_0(s) = 0$$

negativ realdel (**slutna systemet** $G_c(s)$ **stabilt**)

$G_0(C)$: Fullständiga Nyquistkurvan

- Vanliga Nyquistkurvan motsvarar

bilden av



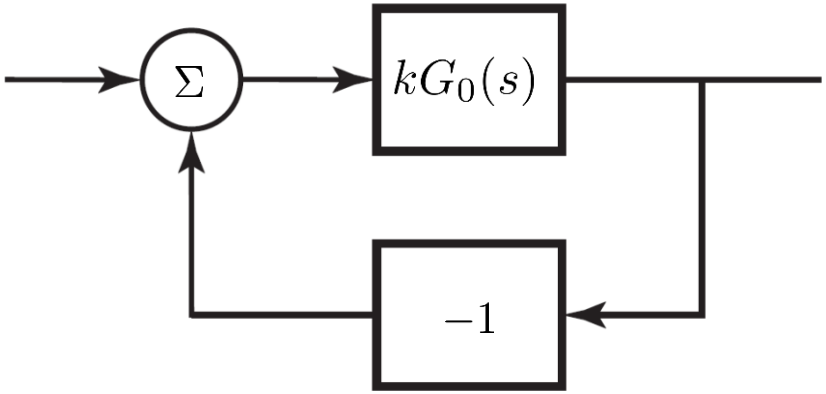
- Bilden av

fås genom dess spegelbild i realaxeln då

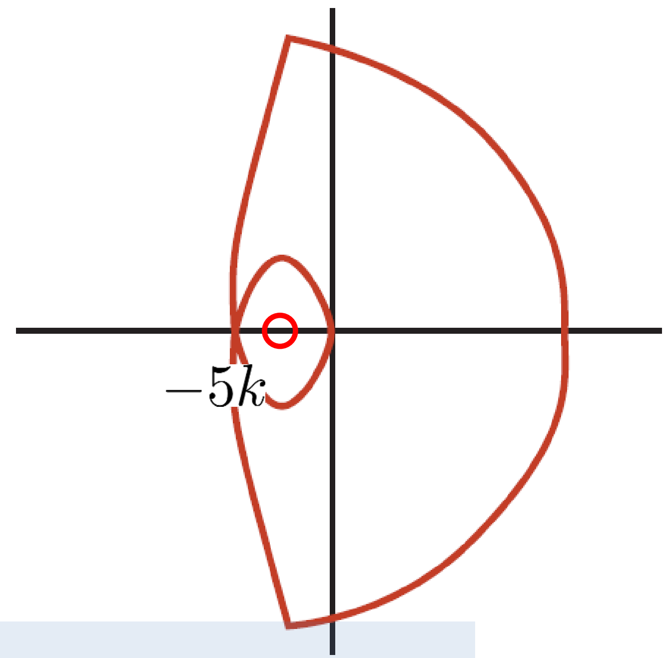
$G_0(\bar{s}) = \overline{G_0(s)}$ (reella koefficienter)

- Bilderna av lilla och stora cirkeln: Se exempel

Exempel 1: För vilka k är slutna systemet stabilt?



$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}$$

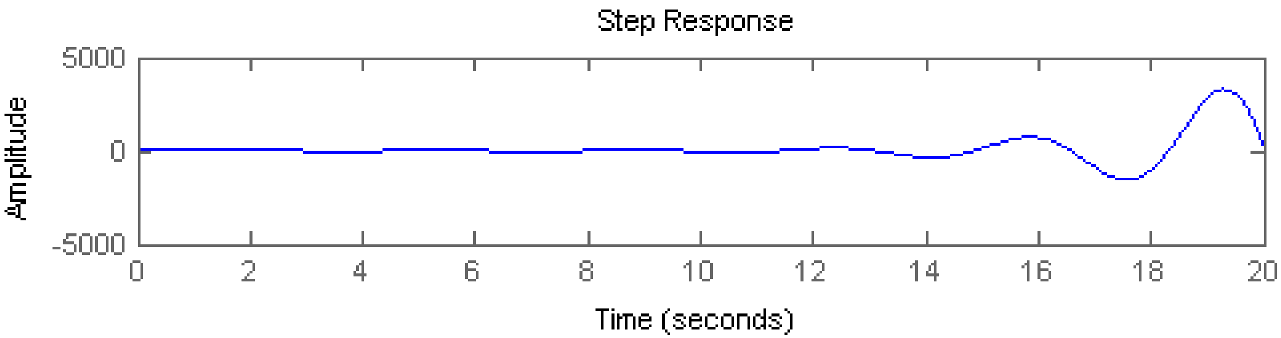


- Fullständiga Nyquistkurvan:
- För vilka k omsluts inte -1?

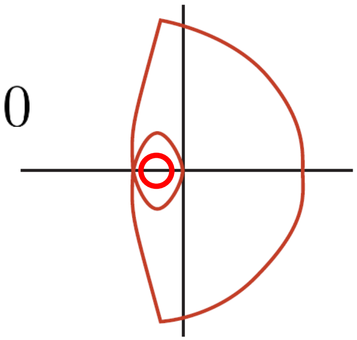
$$-1 < -5k \Leftrightarrow k < 0.2$$

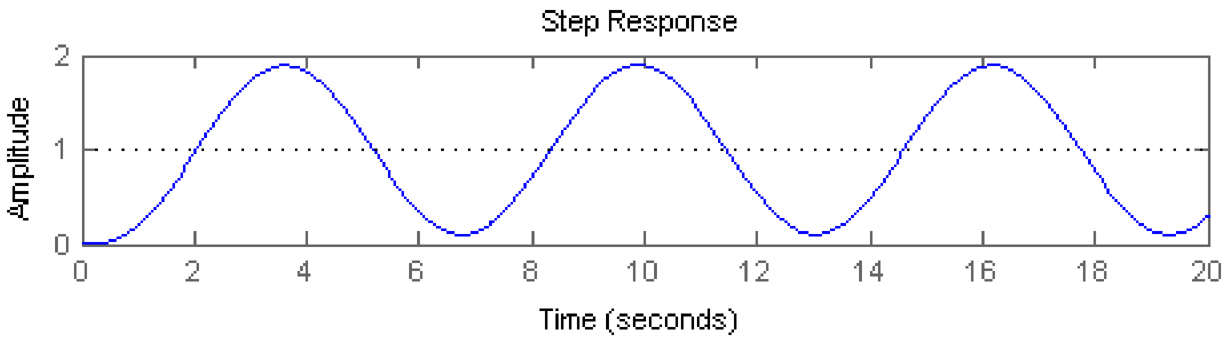
- Enligt Nyquistkriteriet är slutna systemet stabilt då $k < 0.2$

Exempel 1: Verifiering

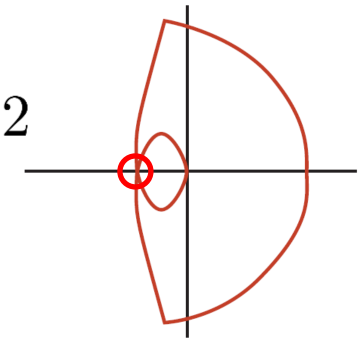


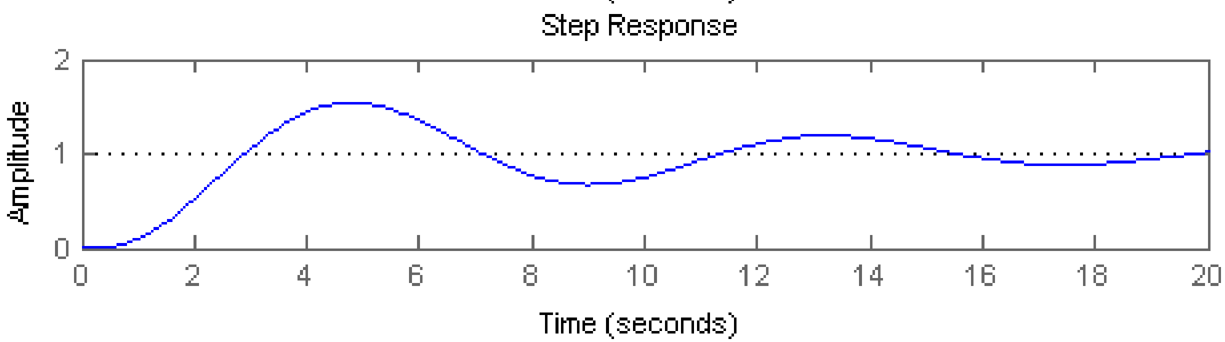
$$k = 1.0$$



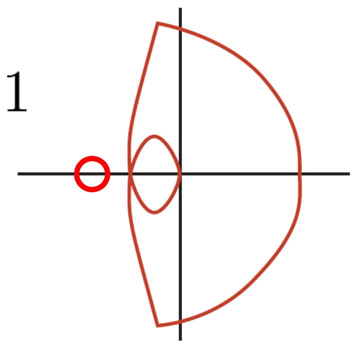


$$k = 0.2$$

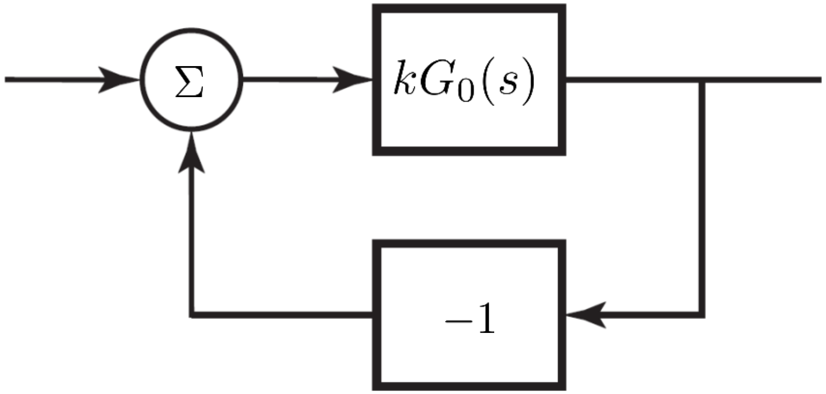




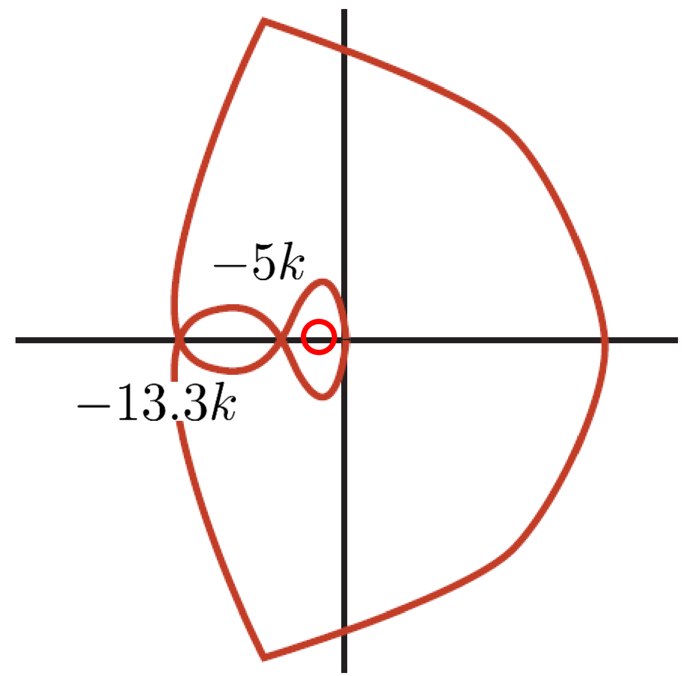
$$k = 0.1$$



Exempel 2: För vilka k är slutna systemet stabilt?



$$G_0(s) = \frac{3.33(s+6)^2}{s(s+1)^2}$$

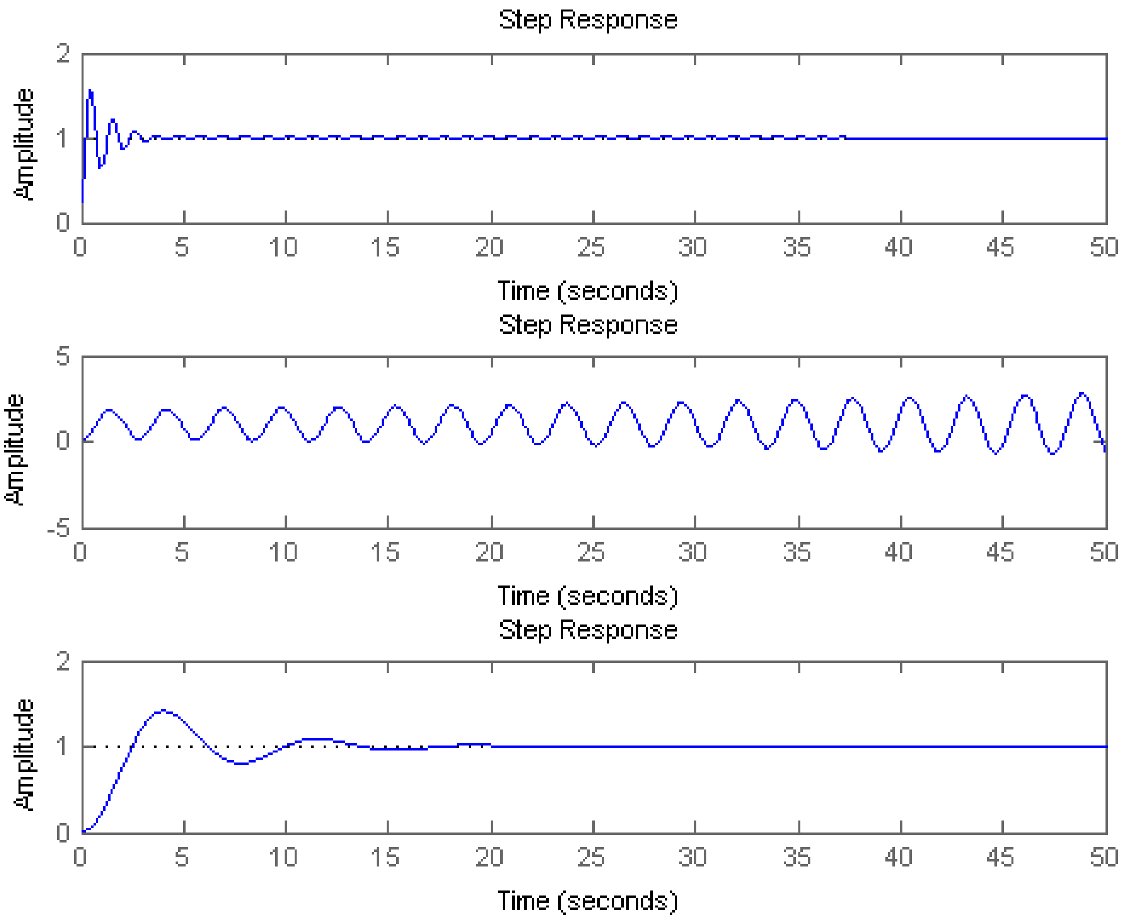


- Fullständiga Nyquistkurvan:
- För vilka k omsluts inte -1 ?

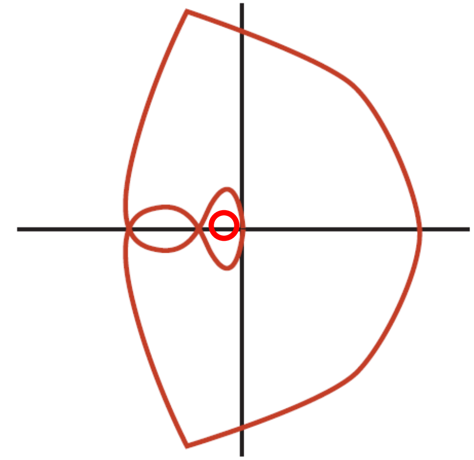
$$-5k < -1 \Leftrightarrow k > 0.2$$
$$-1 < -13.3k \Leftrightarrow k < 0.075$$

- Enligt Nyquistkriteriet är slutna systemet stabilt då $k > 0.2$ eller $k < 0.075$

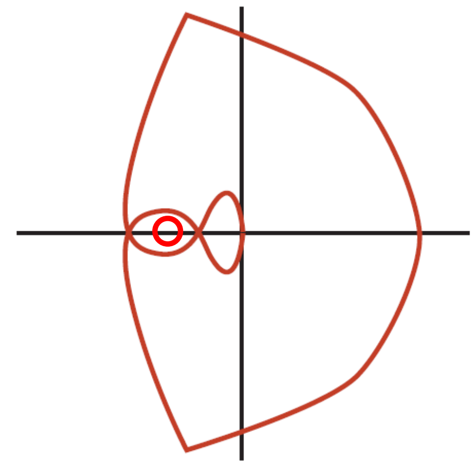
Exempel 2: Verifiering



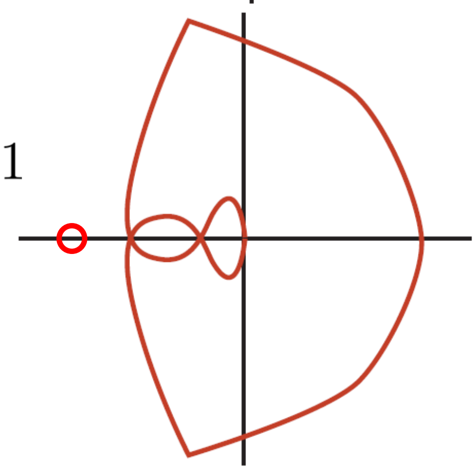
$k = 1.0$



$k = 0.1$



$k = 0.01$



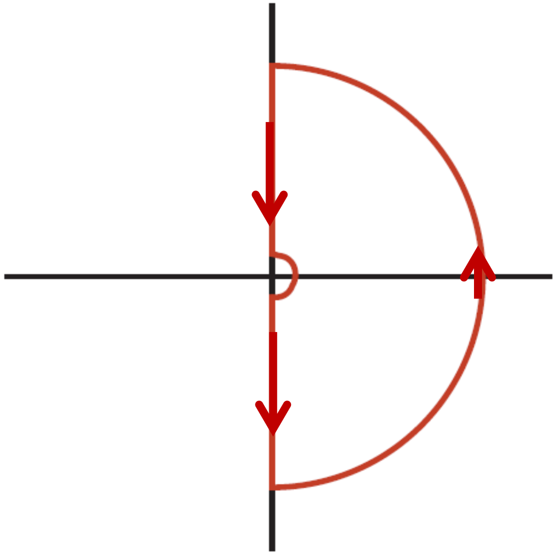
Upplägg

- Harry Nyquist
- Frekvensanalys i sluten loop
- Nyquistkriteriet
- Exempel
- **Argumentvariationsprincipen**

Argumentvariationsprincipen

- Om *öppna systemet är instabilt* används mer allmänt **argumentvariationsprincipen**
- Resultat från komplex analys som även ger ett enkelt bevis för Nyquistkriteriet
- Låt C genomlöpas

i positiv riktning:



Argumentvariationsprincipen

- Antag att $G_0(s)$ har P poler som omsluts av C ($G_0(s)$ har P instabila poler)
- Antag att $1 + G_0(s)$ har N nollställen som omsluts av C ($G_c(s)$ har N instabila poler)

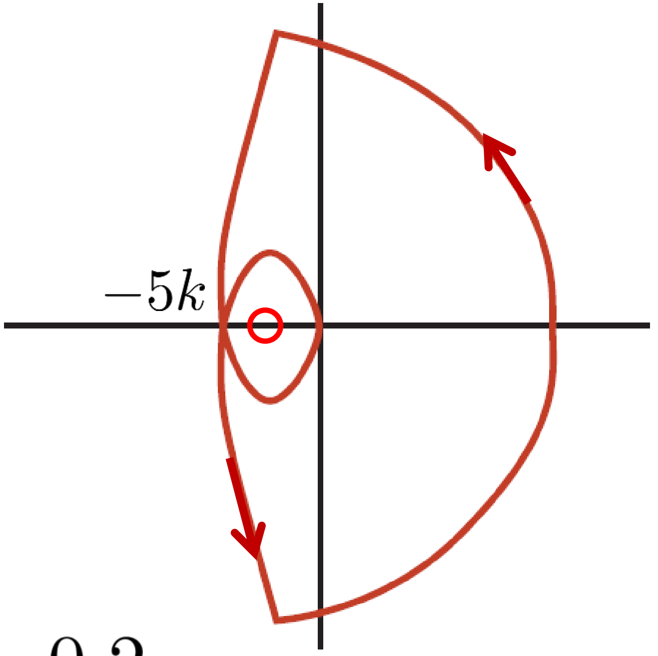
- Då gäller $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg(1 + G_0(s)) = N - P$
- Eller: $N - P =$ antalet positiva varv $G_0(C)$ omsluter -1

Exempel 1 (igen)

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}$$

$$P = 0$$

$$N = ?$$



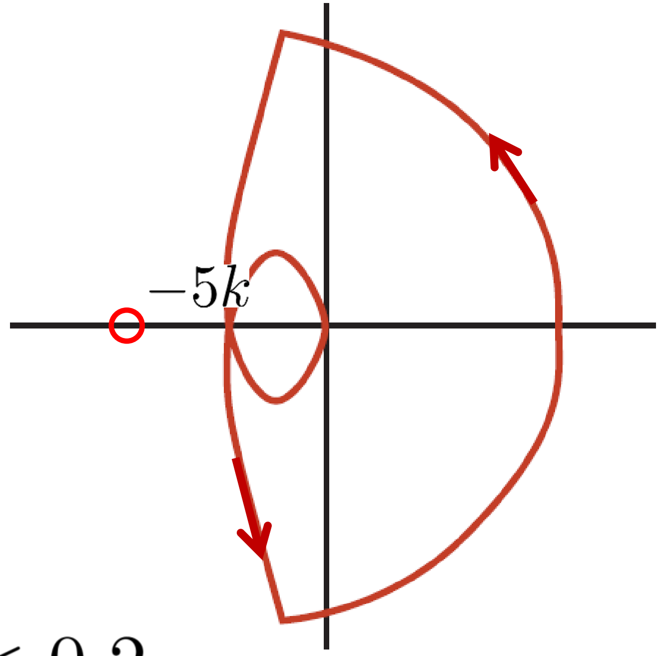
- Då $-5k < -1 \Leftrightarrow k > 0.2$
- Antalet positiva varv: 2
- Alltså $N = 2 + P = 2$
- Slutna systemet har 2 instabila poler

Exempel 1 (igen)

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}$$

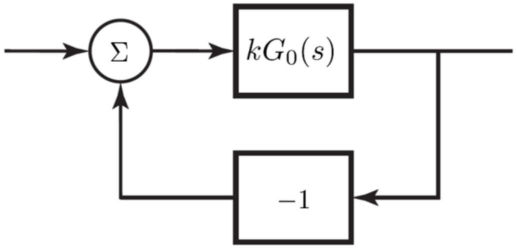
$$P = 0$$

$$N = ?$$



- Då $-1 < -5k \Leftrightarrow k < 0.2$
- Antalet positiva varv: 0
- Alltså $N = 0 + P = 0$
- Slutna systemet har 0 instabila poler

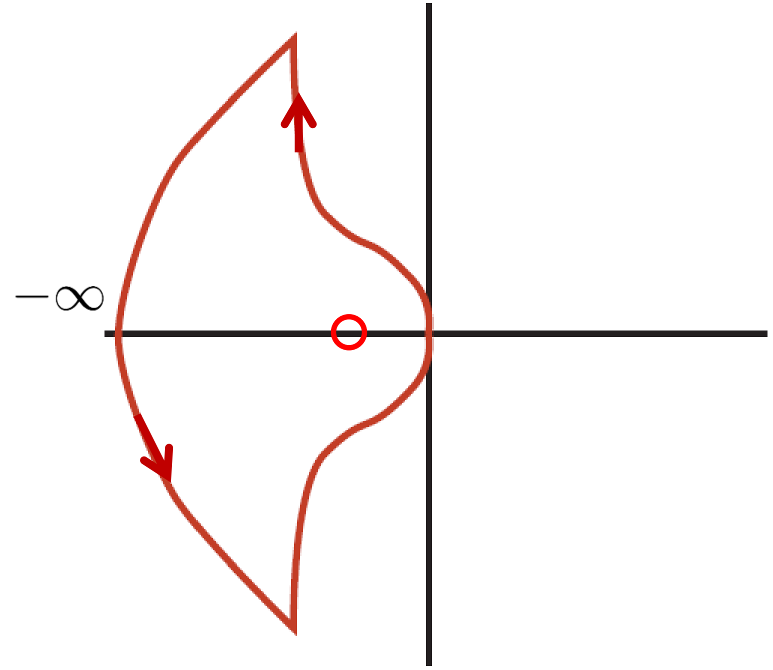
Exempel 3: Instabilt öppet system



$$G_0(s) = \frac{1}{s(s-1)(s+5)}$$

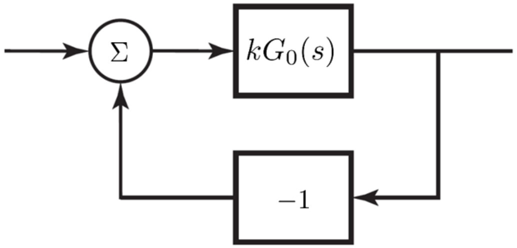
$$P = 1$$

$$N = ?$$



- Då $k > 0$
- Antalet positiva varv: 1
- Alltså $N = 1 + P = 2$
- Slutna systemet har 2 instabila poler

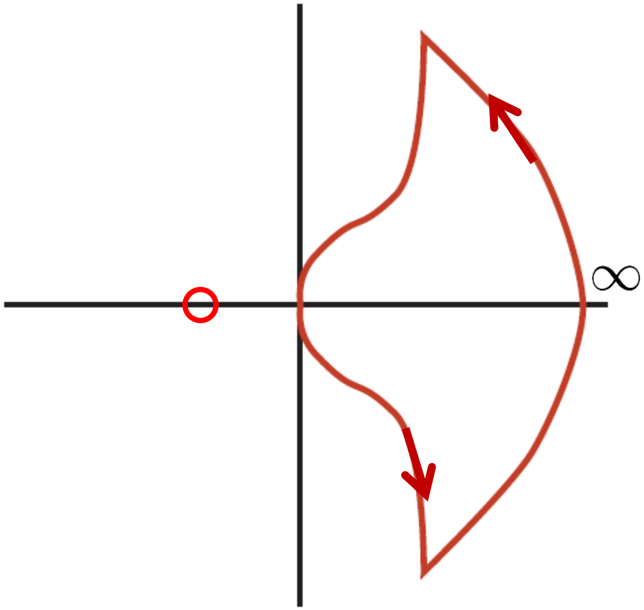
Exempel 3: Instabilt öppet system



$$G_0(s) = \frac{1}{s(s-1)(s+5)}$$

$$P = 1$$

$$N = ?$$



- Då $k < 0$
- Antalet positiva varv: 0
- Alltså $N = 0 + P = 1$
- Slutna systemet har 1 instabil pol

Sammanfattning

- **Nyquistkriteriet**: Ett enkelt stabilitetsvillkor för slutna system baserat på frekvenssvar

- Om öppna systemet stabilt:

Antalet positiva varv fullständiga Nyquistkurvan gör kring $-1 =$ antalet instabila poler i slutna systemet

- Ger upphov till stabilitetsmarginaler och vägledning vid regulatordesign