

SF1518, SF1519, SF1541 Facit: Tentamen i Numeriska metoder , Tisdag 14-10-28

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

- (2p) 1. Trapetsregeln för beräkning av en integral har noggrannhetsordning 2. Detta betyder att

- | | |
|--|--|
| ☐ Antalet korrekta decimaler kvadreras vid varje steglängsdshalvering | ☐ Felet är proportionellt mot steglängden |
| a. ☐ Felet med steglängden $h/2$ är kvadraten av felet med steglängden h | b. ☒ Felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat |
| ☒ Felet med steglängden $h/2$ är en fjärdedel av felet med steglängden h | ☐ Felet är proportionellt mot steglängden i kubik |

2. Differentialekvationsproblemet

$$\left(1 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) \frac{d^2z}{dt^2} = 100z, \quad z(0) = 1000, \quad \frac{dz}{dt}(0) = 0$$

- (2p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer Då blir $n \dots$

- | | |
|--|---|
| ☐ 1. | ☐ 4. |
| ☒ 2. | ☐ 5. |
| ☐ 3. | ☐ det är omöjligt att säga |

- (2p) 3. En dator löser ett icke-glest linjärt ekvationssystem med 200 ekvationer och 200 obekanta på 0.1 sekunder. Hur lång tid tar det för samma dator att lösa ett system med 1000 ekvationer och obekanta?

- | | |
|------------------------------|--|
| ☐ 0.5 | ☐ 2.5 |
| ☐ 5 | ☒ 12.5 |
| ☐ 50 | ☐ 125 |
| ☐ 625 | ☐ 1250 |

- (3p) 4. Minstakvadratanpassning görs av ett andragradspolynom till givna mätdata y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 vid x -värdena x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Problemet leder till ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{z} \approx \mathbf{b}$. Vilka påståenden nedan är sanna? Residualvektorn betecknas med $\mathbf{r}$.

- | | | |
|--|---|--|
| a. | b. | c. |
| ☐ $\mathbf{r}$ har 2 komponenter | ☐ A har 2 rader | ☐ A har 2 kolumner |
| ☐ $\mathbf{r}$ har 3 komponenter | ☐ A har 3 rader | ☒ A har 3 kolumner |
| ☐ $\mathbf{r}$ har 4 komponenter | ☐ A har 4 rader | ☐ A har 4 kolumner |
| ☒ $\mathbf{r}$ har 5 komponenter | ☒ A har 5 rader | ☐ A har 5 kolumner |

5. Givet en vektorvärd funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2/4 + xy - 4.01 \\ 2x^5y^2 + x - 1.1y^3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (2p) För att kunna använda Newtons metod på systemet $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0$ behöver vi beräkna Jakobi-anen till funktionen. Låt startgissningen till Newtons metod vara $x_0 = 1, y_0 = 2$. Värdet av elementet på andra raden, första kolumnen av Jakobianen är

☐ 8☐ 101☐ 21☐ -5.9☒ 41☐ 0

(2p) 6. Följande tabell är given.

x	801	803	805
y	102	110	126

Ett interpolationspolynom $P(x)$ som går genom samtliga punkterna har andragradskoeficienten

☐ 801☒ 1☐ 102☐ 0☐ 4☐ 126

(2p) 7. Givet följande approximationsformel

$$y'(a) \approx \frac{y(a) - y(a-h)}{h}$$

för derivatan av en funktion $y(x)$. Antag att $y(x)$ kan beräknas med fel som är högst $\frac{1}{2}10^{-8}$ för alla x -värden av intresse. Om steglängden $h = 10^{-4}$ används så blir felet i formeln pga fel i beräkning av $y(x)$ högst

☐ $\frac{1}{2}10^{-8}$ ☐ $\frac{1}{2}10^{-4}$ ☐ 10^{-8} ☒ 10^{-4} ☐ $\frac{1}{2}10^{-6}$ ☐ $\frac{1}{2}10^{-2}$ ☐ 10^{-6} ☐ 10^{-2}

(3p) 8. För att beräkna $\sqrt[4]{A}$ för givet värde på A så formuleras ekvationen

$$x^4 - A = 0,$$

Newtons metod använd på denna ekvation kan skrivas

☐ $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}\frac{1}{x_n^3}$

☐ $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{A}{x_n^3}$

☒ $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{A}{4}\frac{1}{x_n^3}$

☐ $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2x_n}$

☐ $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n^3}$

☐ $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{A}{2x_n}$

(2p) 9. Integralen $\int_0^1 f(x)dx$ med

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^8 + x^4 + x + 10}}$$

skall beräknas. Svaret är ungefär

☐ 0.03☐ 100☒ 0.3☐ 300☐ 3☐ 1000☐ 30