

**SF1518, SF1519, SF1541 Facit: Tentamen Numeriska Metoder**  
**Tisdag 14-10-28**

Hjälpmedel:

**Del 2:** 50 poäng.

**P1.** Inför beteckningen  $y = (k, z)^T$  och skriv

$$F(y) = \begin{pmatrix} z^2k - k^3z - 2.02 \\ 2zk + z^3k^{-1} - 11.78 \end{pmatrix}$$

Jakobianen till  $F$  blir

$$J = \begin{pmatrix} z^2 - 3k^2z & 2zk - k^3 \\ 2z - z^3k^{-2} & 2k + 3z^2k^{-1} \end{pmatrix}$$

Med startvärdet  $z = 2, k = 1$  blir

$$F(y) = \begin{pmatrix} -0.02 \\ 0.22 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}$$

Det linjära ekvationssystem blir

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk \\ dz \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0.02 \\ 0.22 \end{pmatrix}$$

Med Gausselimination får vi lösningen  $dk = -0.0588, dz = -0.0325$  så nästa iterat i Newtons metod blir  $k = 0.9412, z = 1.9675$  Ett matlabprogram skrivs

```
z=2; k=1;
d=1;
while norm(d,inf)>1.E-8
    F=[z*z*k-k*k*k*z-2.02
        2*z*k+z*z*z/k-11.78];
    J=[z*z-3*k*k*z    2*z*k-k*k*k
        2*z-z*z*z/(k*k)    2*k+3*z*z/k];
    d=-J\F;
    k=k+d(1); z=z+d(2);
    norm(d,inf)
end
k
z
```

**P2. P2a.** Inför variablerna  $u_1 = x, u_2 = x', u_3 = y, u_4 = y'$  så får vi systemet

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_2 \\ u'_2 &= -u_1/r3 \\ u'_3 &= u_4 \\ u'_4 &= -u_3/r3 \end{aligned}$$

med

$$r^3 = (x^2 + y^2)^{3/2}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 - E \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1+E}{1-E}\right)^{1/2} \end{pmatrix}$$

Matlabfunktion

```
function f=fodep(t,u)
r3=(u(1)^2+u(3)^2)^(3/2);
f=[u(2);-u(1)/r3;u(4);-u(3)/r3];
```

beräknar högerledet i detta system.

**P2b,c**

```
%b
E=0.2;
u0=[1-E; 0; 0; ((1+E)/(1-E))^(1/2)];
[T,U]=ode45(@fodep,[0 20],u0);
plot(U(:,1),U(:,3))
%c
i=1;
while T(i)<2
    i=i+1;
end
r=abs(sqrt((U(i:end,1)-(1-E)).^2+U(i:end,3).^2));
[l,index]=min(r)
period=T(index+i)
```

**P3. P3a.** Inför diskretiseringspunkterna  $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 6$  och approximativa värden  $u_1 = 0.5, u_2 = z, u_3 = 0.33333\dots$ . Vi har då endast en inre punkt  $x_2 = 5$  och en okänd storhet  $z$ . Diskretiseringen av differentialekvationen ger då

$$\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} - u_2^3 + u_2 \frac{u_3 - u_1}{2h} = 0$$

d.v.s. med kända värden insatta får vi ekvationen för  $z$

$$\frac{1/3 - 2z + 0.5}{1} - z^3 + z \frac{1/3 - 0.5}{2} = 0$$

**P3b.** Inför diskretiseringspunkterna  $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$  och approximativa värden  $z_0 = 0.5, z_1, z_2, z_3$ . Vi har då två inre punkter  $x_1, x_2$  och tre okända storheter  $z_1, z_2, z_3$ . Diskretiseringen av differentialekvationen i  $x_1, x_2$  ger då

$$\frac{z_2 - 2z_1 + 0.5}{h^2} - z_1^3 + z_1 \frac{z_2 - 0.5}{2h} = 0$$

$$\frac{z_3 - 2z_2 + z_1}{h^2} - z_2^3 + z_2 \frac{z_3 - z_1}{2h} = 0$$

En tredje ekvation får vi från randvillkoret på högra randen

$$z_2 + 3 \frac{z_3 - z_1}{2h} = 0$$

Detta är våra tre ekvationer för de tre obekanta. Här är  $h = 0.5$