Lösningsförslag: Reglerteknik AK Tentamen 2014–10–31

Uppgift 1a

Vi har följande samband mellan in- och utsignal:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} u(\tau)d\tau = \int_{\tau=0}^{t} 10\sin(\pi\tau)d\tau = \frac{10}{\pi}[1-\cos(\pi t)]$$

$$\textbf{Svar:} \quad y(t) = \frac{10}{\pi}[1-\cos(\pi t)] = \frac{10}{\pi}\sin(\pi t - \frac{\pi}{2}) + \frac{10}{\pi}$$

Uppgift 1b

Vi har

$$|G_o(i\omega)| = \left|\frac{1}{i\omega}\right| = \frac{1}{|\omega|}$$
$$\arg G_o(j\omega) = \arg\frac{1}{i\omega} = -90^\circ$$

Nyquistkurvan, när ω går från 0 till oändligheten, följer alltså negativa imaginära axeln från minus oändligheten till 0. Se skiss nedan.

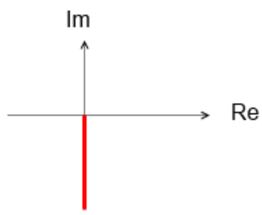


Figure 1: Skiss av Nyquistkurvan för uppgift 1b

Skärfrekvens, ω_c, ges av: $|G_o(i\omega_c)| = \frac{1}{|\omega_c|} = 1$. Fasmarginalen ges av $\varphi_m = \arg G_o(i\omega_c) - (-180^\circ) = 90^\circ$. **Svar:** Skärfrekvens $\omega_c = 1$ rad/s och fasmarginal $\varphi_m = 90^\circ$.

Uppgift 1c

Vi har följande samband mellan styrsignalen och reglerfelet

$$U(s) = F(s)E(s) = \frac{s+3}{s+9}E(s) \Leftrightarrow (s+9)U(s) = (s+3)E(s) \Leftrightarrow \dot{u}(t) + 9u(t) = \dot{e}(t) + 3e(t)$$

Vi approximerar derivatorna med Tustins formel

$$\dot{u}(t) \approx \frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}u(t) = 20\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}$$

där q är förskjutningsoperatorn. Detta ger

$$\begin{aligned}
20\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}u(t)+9u(t) &= 20\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}e(t)+3e(t) \Leftrightarrow \\
20(1-q^{-1})u(t)+9(1+q^{-1})u(t) &= 20(1-q^{-1})e(t)+3(1+q^{-1})e(t) \Leftrightarrow \\
(29-11q^{-1})u(t) &= (23-17q^{-1})e(t) \Leftrightarrow \\
29u(t)-11u(t-0.1) &= 23e(t)-17e(t-0.1)
\end{aligned}$$

Svar:$u(t) = \dfrac{11u(t-0.1)+23e(t)-17e(t-0.1)}{29}$

Uppgift 1d

Regulatorn kan skrivas som

$$u(t) = K\left[e(t)+T_D\dot{e}(t)\right] \Leftrightarrow U(s) = \underbrace{K\left[1+T_D s\right]}_{F(s)} E(s). \tag{1}$$

Slutna systemet ges av

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{K(1+T_D s)}{s^2+1+K(1+T_D s)}.$$

Slutna systemets poler ges av $s^2+1+K(1+T_D s) = s^2+KT_D s+K+1 = 0$. Vill ha poler i $s=-2,-3$, alltså att polerna ska ges av ekvationen $(s+2)(s+3) = s^2+5s+6 = 0$. Identifiering av termer ger

$$\begin{aligned}
K+1 &= 6 \\
KT_D &= 5
\end{aligned}$$

Svar: $K=5$, $T_D=1$.

Uppgift 2a

Beräkna överföringsfunktionerna

$$E(s) = \underbrace{\frac{1}{1+F(s)G(s)}}_{G_{re}(s)}\Theta_{\text{ref}}(s) - \underbrace{\frac{G(s)}{1+F(s)G(s)}}_{G_{le}(s)}L(s)\,. \tag{2}$$

Antag att det återkopplade systemet är stabilt, samt att $\theta_{\text{ref}}(t) = \theta_{ref}$ och $\ell(t) = \ell$ är konstanter. Slutvärdesteoremet ger då att

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s)\,, \\
&= \lim_{s\to 0} s\left(\frac{\theta_{ref}}{s}\frac{1}{1+F(s)G(s)} - \frac{\ell}{s}\frac{G(s)}{1+F(s)G(s)}\right), \\
&= \lim_{s\to 0}\left\{\theta_{ref}\frac{s(s+a)(s+60)}{s(s+a)(s+60)+2000K(s+b)}\right. \\
&\qquad \left. -\,\ell\frac{2000(s+a)}{s(s+a)(s+60)+2000K(s+b)}\right\}, \\
&= -\,\ell\frac{a}{Kb}\,,
\end{aligned}$$

Detta visar att $a = 0$ krävs för att det stationära reglerfelet skall vara lika med noll.

Uppgift 2b

Uppgift a) med $a = 0$ ger att det slutna systemts poler ges av

$$s^2(s+60) + 2000K(s+b) = 0$$

- Startpunkter: $s = \{0, 0, -60\}$ och ändpunkt i $s = -b$
- Asymptoter: 2 stycken med riktingar $\pm\pi/2$ och skärningspunkt:

  $$\frac{1}{2}[0+0-60-(-b)] = \frac{(b-60)}{2}$$

  Vi kommmer att ha tre fall $0 < b < 60$, $b = 60$ och $b > 60$.
- Reella axeln: om $0 < b < 60 \Rightarrow [-60, -b]$. Om $b > 60 \Rightarrow [-b, -60]$
- Imaginarära axeln: $s = i\omega \Rightarrow$

  $$i[-\omega^3 + 2000K\omega] + [-60\omega^2 + 2000Kb] = 0$$

  Den enda lösningen är $\omega = 0$ and $K = 0$, eftersom $\omega^2 = 2000K$ insatt i $-60\omega^2 + 2000Kb$ ger $K = 0$ eller $b = 60$. Ifall $b = 60$ så blir ekvationen för polerna $(s + 60)[s^2 + 2000K]$, dvs vi komer alltid att ha en pol i -60 och två rent imaginära poler.

Figuren nedan ger rotorten för de fyra intressanta fall. I fallet $0 < b < 60$ så ligger rotorten hela tiden i vänster halvplan och det återkopplade systemet är stabilt för all värden på $K > 0$. Det återkopplade systemet blir blir dock mycket oscillativt ifall b väljs nära 60, och långsamt ifall b väljs litet. I fallet $b > 60$ så är det återkopplade systemet instabilt för alla värden på K.

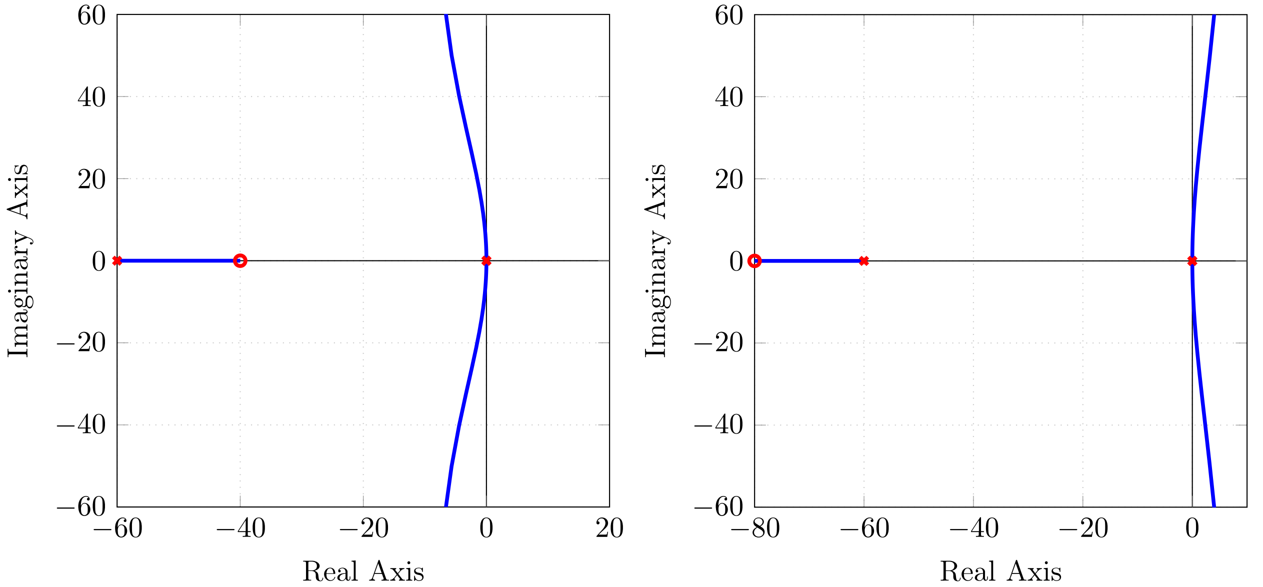


Figure 2: Rotort när $K \geq 0$ och $b = 40 < 60$ (vänstra) och $b = 80 > 60$ (högra).

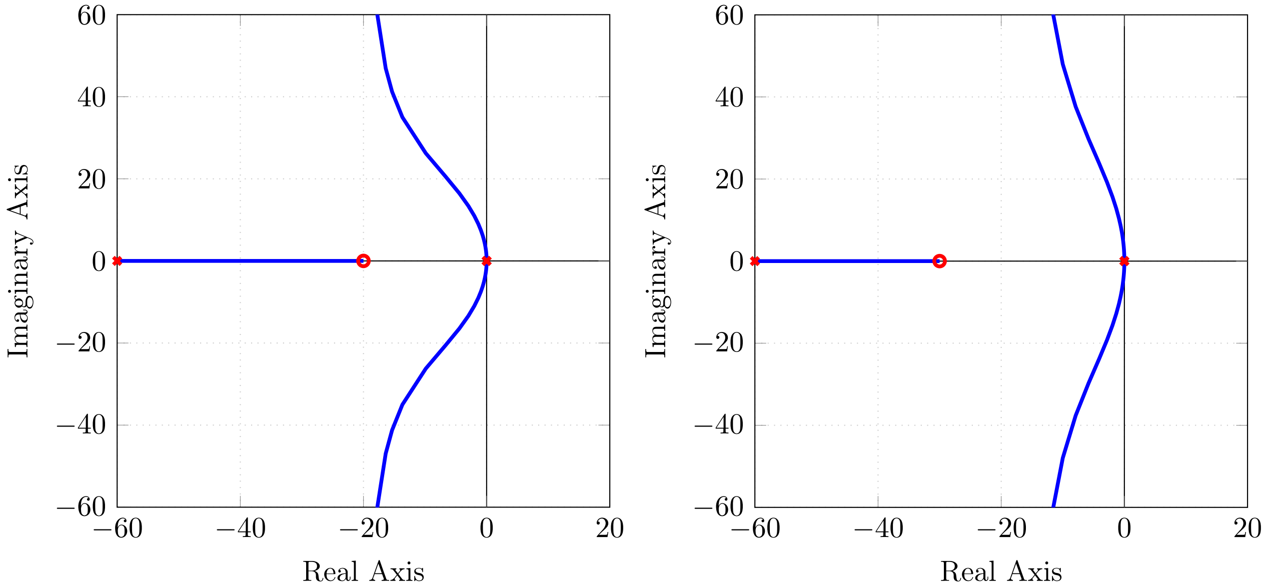


Figure 3: Rotort när $K \geq 0$ och $b = 20$ (vänstra) och $b = 30$ (högra).

Uppgift 2c

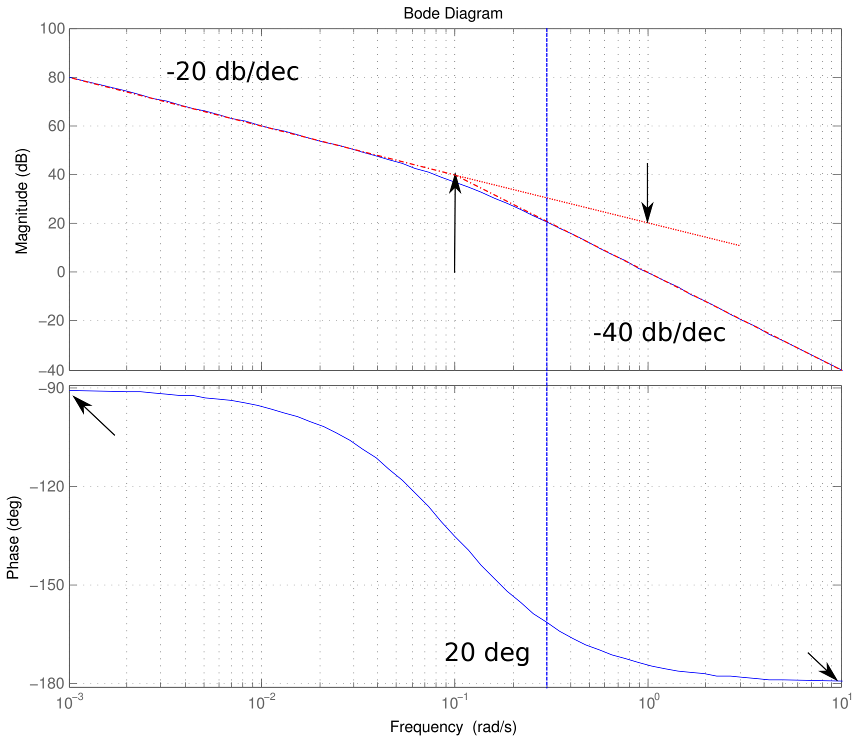
Låt

$$G(s) = \frac{2000}{s(s+p)}, \quad p \in [50, 70]$$

Kravet för stabilitet enligt Uppgift 2b) blir $K > 0$ och $(b - p) < 0$, dvs $b < 50$ krävs för att få ett stabilt återkopplat system för alla värden av $p \in [50, 70]$.

Uppgift 3a

Systemet har en lågfrekvensasymptot med lutning -20 dB/dek, d.v.s. en integrerande effekt, som motsvarar en pol i origo (faskurvan -90 vid låga frekvenser), och en högfrekvensasymptot med lutning -40 dB/dek. Därför har systemet relativt gradtal 2; som motsvarar två poler (totalt).



Asymptotiska bodediagrammet har en brytpunkt vid 0.1 rad/s; detta motsvarar en reell pol med absolutbelopp 0.1. Fasvinkeln sjunker med 90 grader runt brytpunkten, d.v.s. polen är stabil.
Integratorasymptoten har absolutbelopp 20 dB när $\omega = 1$, d.v.s. systemets förstärkning är:

$$sG(0) = K_{sys} = 10^{20/20} = 10. \tag{3}$$

Svar: Överföringsfunktionen är

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0.1)}. \tag{4}$$

Uppgift 3b

Från bodediagrammet läser vi att, vid $\omega_{c,d} = 0.3$ rad/s, är fasmarginalen 20 grader. Alternativt:

$$180 - [-\arg G(0.3j)] = 180 + \arg\left(\frac{1}{0.3j(0.3j+0.1)}\right) \approx 20°. \tag{5}$$

Från Fig. [5.13] sid. 106 (Glad, Ljung) ser vi att vi får 25 graders fasavancering (som krävs för att $\varphi_m = 45$) om leadlänken har $\beta = 0.4$. Alternativt:

$$\frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}} = \tan(25°) \quad \rightarrow \quad \beta \approx 0.41. \tag{6}$$

Vi vill få fasavancering vid $\omega_{c,d} = 0.3$, så:

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} \approx 5.3. \tag{7}$$

Vi måste sänka absolutbeloppet med 20 dB, så att $\omega_c = \omega_{c,d}$. Detta motsvarar en förstärkning vid $\omega_{c,d}$ i regulatorn enligt ekv. 5.6 sid. 106 (ibidem):

$$\frac{K}{\sqrt{\beta}} = 10^{-20/20} \quad \rightarrow \quad K = 0.1\sqrt{\beta} \approx 0.06. \tag{8}$$

Svar:

$$F(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D + 1} = 0.06\frac{5.3s+1}{2.1s+1}. \tag{9}$$

Uppgift 3c

För att höja fasmarginalen med ytterligare 30° kan vi:

(i) minska β till $\beta_1 = 0.15$, som motsvarar:

$$\begin{aligned} \tau_{D,1} &= \frac{1}{0.3\sqrt{0.15}} \approx 8.6, \\ K_1 &= 0.1\sqrt{0.15} \approx 0.039, \end{aligned} \tag{10}$$

d.v.s. en ny regulator:

$$F_1(s) = 0.039\frac{8.6s+1}{1.3s+1}. \tag{11}$$

1. konstruera en fasavancerande länk med $\beta_2 = 0.5$, som ger 20° fasavancering:

$$\tau_{D,2} = \frac{1}{0.3\sqrt{0.5}} \approx 4.7. \tag{12}$$

Den nya länken höjer absolutbeloppet med $1/\sqrt{\beta_2}$, så vi måste höja förstärkningen i regulatorn med $\sqrt{\beta_2}$:

$$K_2 = K\sqrt{\beta_2} = 0.1\sqrt{\beta}\sqrt{\beta_2} \approx 0.045. \tag{13}$$

Regulatorn blir då:

$$F_2(s) = K_2 \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D + 1} \frac{\tau_{D,2} s + 1}{\beta_2 \tau_{D,2} + 1} = 0.045 \frac{1 + 5.3s}{1 + 2.1s} \frac{1 + 4.7s}{1 + 2.2s}. \tag{14}$$

I de två fallen kan vi beräkna högfrekvensförstärkningen med gränsvärdet:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \lim_{s \to \infty} F_1(s) = \frac{K_1}{\beta_1} = \frac{0.039}{0.15} \approx 0.26, \\ &\text{(ii)} \quad \lim_{s \to \infty} F_2(s) = \frac{K_2}{\beta \beta_2} = \frac{0.045}{0.4 \cdot 0.5} \approx 0.22. \end{aligned} \tag{15}$$

Svar: Metod (ii) är att föredra, men skillnaden är liten.

Uppgift 4a

Ta fram en tillståndsbeskrivning för systemet i Figur 3, med tillstånden $x_1(t)$ och $x_2(t)$, insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$. Vi får för överföringsfunktionen från u till x_1:

$$\begin{aligned} \frac{X_1(s)}{U(s)} &= \frac{1}{1+s} \\ X_1(s)(s+1) &= U(s) \\ sX_1(s) + X_1(s) &= U(s) \\ \dot{x}_1(t) + x_1(t) &= u(t) \\ \dot{x}_1(t) &= u(t) - x_1(t). \end{aligned}$$

Likadant för överföringsfunktionen från u till x_2:

$$\begin{aligned} \frac{X_2(s)}{U(s)} &= \frac{\alpha}{1+s} \\ X_2(s)(s+1) &= \alpha U(s) \\ sX_2(s) + X_2(s) &= \alpha U(s) \\ \dot{x}_2(t) + x_2(t) &= \alpha u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha u(t) - x_2(t). \end{aligned}$$

Svar: Vi får tillståndsekvationen

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} u$$

Vi har $z = x_1 + x_2$ och $y = z + z^3$, som ger utsignalsekvationen

$$y = (x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^3.$$

Uppgift 4b

Ta fram en linjärisad tillståndsbeskrivning för systemet in Figur 3, med tillstånden $x_1(t)$ och $x_2(t)$, insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$.
Först ska vi beräkna det stationära tillståndet $x_{1,0}, x_{2,0}$ för en konstant insignal $u(t) = u_0$. Vi sätter $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} u_0,$$

som ger

$$\begin{aligned} x_{1,0} &= u_0 \\ x_{2,0} &= \alpha u_0. \end{aligned}$$

Tillståndsekvationerna är redan linjära. Vi ska dock ta fram en linjäriserad utsignalsekvation:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{x_{1,0},x_{2,0}} &= \left.\frac{\partial (x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^3}{\partial x_1}\right|_{x_{1,0},x_{2,0}} = 1 + 3(x_{1,0} + x_{2,0})^2 = 1 + 3(1+\alpha)^2 u_0^2 \\ \left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{x_{1,0},x_{2,0}} &= \left.\frac{\partial (x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^3}{\partial x_2}\right|_{x_{1,0},x_{2,0}} = 1 + 3(x_{1,0} + x_{2,0})^2 = 1 + 3(1+\alpha)^2 u_0^2. \end{aligned}$$

Svar: Det linjäriserade systemet är

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= (1 + 3(1+\alpha)^2 u_0^2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

där $\Delta u = u - u_0$, $\Delta x_1 = x_1 - u_0$, $\Delta x_2 = x_1 - \alpha u_0$, $\Delta y = y - 1 + 3(1+\alpha)^2 u_0^2$.

Uppgift 4c

Antag att $\alpha = 1, u_o = 0$ samt att tillstånden $x_1(t)$ och $x_2(t)$ är mätbara. Vi vill konstruera en tillståndsåterkoppling $u(t) = -l_1 x_1 - l_2 x_2$. Var kan det återkopplade systemets poler placeras? Vi har

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{16}$$

med

$$u = -\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

som blir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 - l_1 & -l_2 \\ -l_1 & -1 - l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi beräkna polerna av det slutna systemet:

$$\begin{aligned}
\det\left(sI - \begin{bmatrix} -1-l_1 & -l_2 \\ -l_1 & -1-l_2 \end{bmatrix}\right) &= \det \begin{bmatrix} s+1+l_1 & l_2 \\ l_1 & s+1+l_2 \end{bmatrix} \\
&= (s+1+l_1)(s+1+l_2) - l_1 l_2 \\
&= s^2 + (2+l_1+l_2)s + 1 + l_1 l_2 - l_1 l_2 + l_1 + l_2 \\
&= s^2 + (2+l_1+l_2)s + 1 + l_1 + l_2
\end{aligned}$$

som har nollställen i

$$\begin{aligned}
s_{1,2} &= -\frac{2+l_1+l_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(2+l_1+l_2)^2}{4} - (1+l_1+l_2)} \\
&= -\frac{2+l_1+l_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(l_1+l_2)^2}{4}} = -1 - \frac{l_1+l_2}{2} \pm \frac{l_1+l_2}{2} = \{-1, -1-(l_1+l_2)\}
\end{aligned}$$

som är ekvationer där bara summan av l_1,l_2 spelar roll, inte de enstaka värden.
Svar: En pol ligger i -1 oberoende av l_1, l_2 och den andra kan vi placera fritt på den reela axeln.

Uppgift 4d

För vilka värden på α är det linjäriserade systemet styrbart?
Vi beräknar styrbarhetsmatrisen $\mathcal{S} = [B\ AB]$:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \\
AB &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

och därför

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -\alpha \end{bmatrix}, \tag{18}$$

som tydligen har rank 1 oberoende av α.
Svar: Därför är systemet aldrig styrbart.

Uppgift 5a

Ur figur ses att

$$\begin{aligned}
U(s) &= F(s)\left(R(s) - G(s)\left(L(s) + U(s)\right)\right) \\
&= F(s)R(s) - F(s)G(s)L(s) - F(s)G(s)U(s) \Leftrightarrow \\
U(s) &= \frac{F(s)}{1+F(s)G(s)} R(s) - \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} L(s)
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)\left(U(s)+L(s)\right)\\
&= \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}R(s) + G(s)\left(1-\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}\right)L(s)\\
&= \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)}L(s).
\end{aligned}$$

Med $F(s)=2$ och $G(s)=\frac{1}{s-1}$ fås

$$\begin{aligned}
U(s) &= \frac{2(s-1)}{s+1}R(s) - \frac{2}{s+1}L(s)\\
Y(s) &= \frac{2}{s+1}R(s) + \frac{1}{s+1}L(s)
\end{aligned}$$

Alla överföringsfunktioner har poler i $s=-1$ och är stabila.

Uppgift 5b

Vi har nu

$$\bar{Q}(s) = \frac{2(s-1)}{s+1}.$$

Överföringsfunktionerna ges av

$$\begin{aligned}
U(s) &= \bar{Q}(s)\left(R(s) - G(s)(L(s)+U(s)) + G_m(s)U(s)\right) = [G(s)=G_m(s)]\\
&= \bar{Q}(s)\left(R(s)-G(s)L(s)\right) = \bar{Q}(s)R(s) - \bar{Q}(s)G(s)L(s)\\
Y(s) &= G(s)\left(U(s)+L(s)\right) = \bar{Q}(s)G(s)R(s) + \left(1-\bar{Q}(s)G(s)\right)G(s)L(s)
\end{aligned}$$

Med $G(s)=\frac{1}{s-1}$ och fås $\bar{Q}(s)=\frac{2(s-1)}{s+1}$

$$\begin{aligned}
U(s) &= \frac{2(s-1)}{s+1}R(s) - \frac{2}{s+1}L(s)\\
Y(s) &= \frac{2}{s+1}R(s) + \frac{1}{s+1}L(s)
\end{aligned}$$

Alla överföringsfunktioner har poler i $s=-1$ och är stabila. Observera att de är identiska med Uppgift 5a)!

Uppgift 5c

Nu ges överföringsfunktionerna av

$$\begin{aligned}
U(s) &= \bar{Q}(s)\left(R(s) - (G(s)-G_m(s))(U(s)+L_c(s))\right) = [G(s)=G_m(s)]\\
&= \bar{Q}(s)R(s) + 0L_c(s)\\
Y(s) &= G(s)\left(U(s)+L_c(s)\right) = \bar{Q}(s)G(s)R(s) + G(s)L_c(s).
\end{aligned}$$

Med $F(s) = 2$ och $G(s) = \frac{1}{s-1}$ fås

$$
\begin{aligned}
U(s) &= \frac{2(s-1)}{s+1}R(s) + 0L_c(s) \\
Y(s) &= \frac{2}{s+1}R(s) + \frac{1}{s-1}L_c(s).
\end{aligned}
$$

Överföringsfunktionen från l_c till y har en pol i $s = 1$ och systemet är instabilt! Förklaringen är att regulatorn innehåller en instabil pol nollställeförkortning, M an kan inte använda denna IMC implemtering av regulatorn för instabila system.

Uppgift 5d

Observera först att vi kan kontrollera lösningen i Uppgift 5 b) mha given information! Enligt antagandet är $\bar{Q}(s)$ och $\left[1 - G(s)\bar{Q}(s)\right] G(s)$ stabila. Eftersom $\bar{Q}(s)$ är stabil så är alla eventuella instabila poler till $G(s)\bar{Q}(s)$ också instabila poler till $G(s)$. Men för alla instabila poler, p, så att $G(p) = \infty$ har vi enligt antagandet att $\left[1 - G(p)\bar{Q}(p)\right] G(p) < \infty$. Alltså måste $\left[1 - G(p)\bar{Q}(p)\right] = 0$ och följaktligen är $G(p)\bar{Q}(p) = 1 < \infty$ och vi har visat att $G(s)\bar{Q}(s)$ är stabil.