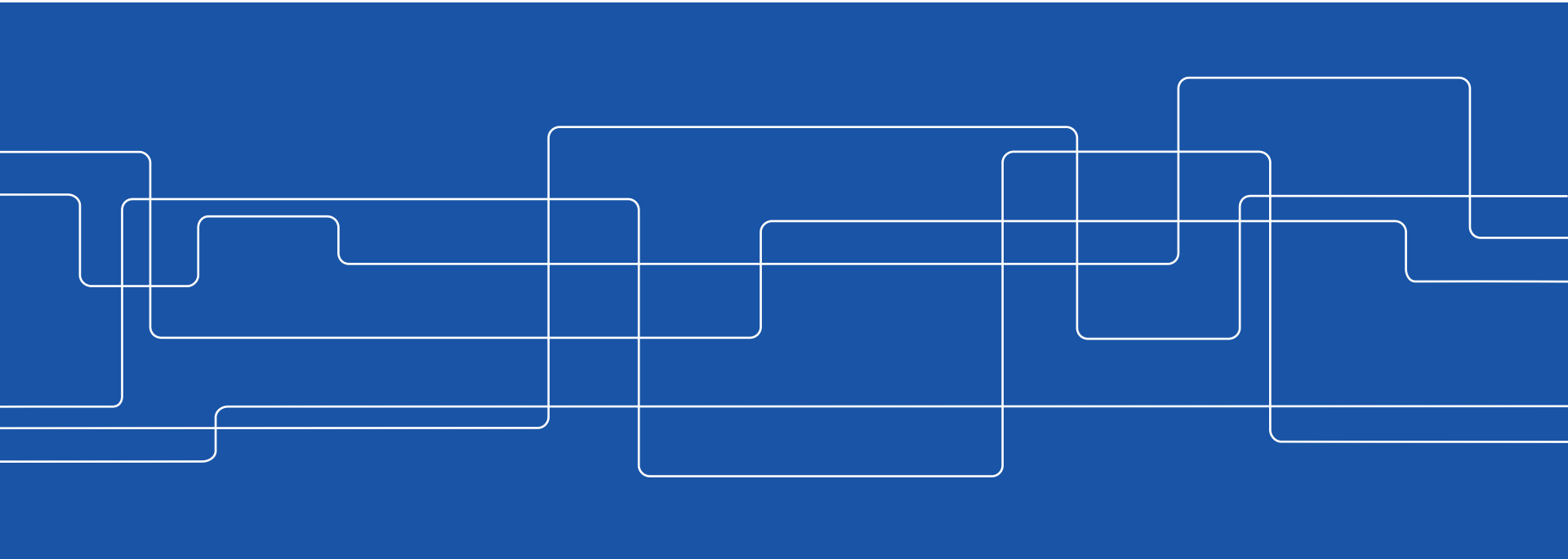


EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 8: Styrbarhet och observerbarhet





Halvtidsutvärderingen – Lite återkoppling

- 1/3 i fas, 1/3 inte i fas, 1/3 sådär. Många tycker det går fort fram...
- **Föreläsningar:** Repetition i början bra, använd inte för många slides (OK), mer sidhänvisningar (OK), ange engelska uttryck (se [ordlista](#)), mer (svåra) räkneexempel (nja)
- **Övningar:** För mycket teori (OK), för snabbt/för långsamt, jobbigt med olika språk, tydligare med att förklara vad som söks och varför, schemakrockar
- **Lab 1:** Bra, långsam, använd mer simulering (nja)



Kursinfo: Extra räknestuga

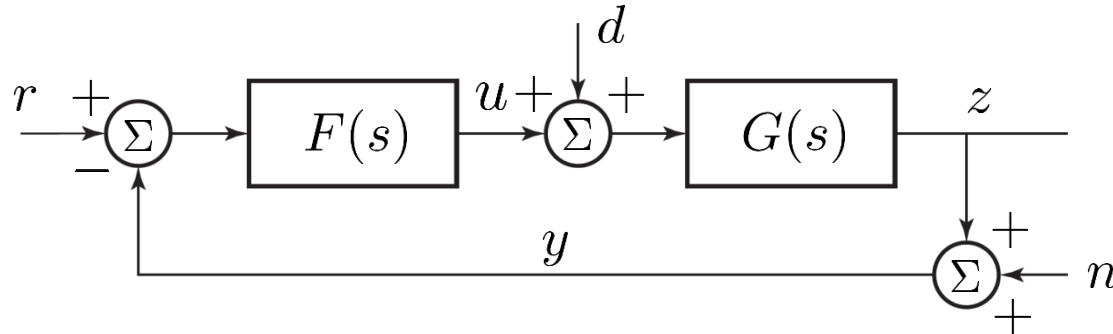
- Extra räknestugor:
 - Måndag, 1 december, 13:15 – 15:00 i E33
 - Måndag, 8 december, 10:15 – 12:00 i Q24
 - Övningsgrupp 4 inställd
 - Tisdag, 25 november, 13:15-15:00
 - Fredag, 28 november, 8:15-10:00
- (Övningsgrupp 5 som vanligt)



Dagens program

- Känslighet (repetition, slides)
- Tillståndsmodeller
 - Linjärisering (repetition, slides)
 - $G(s) \leftrightarrow$ tillståndsmodell (tavlan)
 - Poler från tillståndsmodell (tavlan)
- Lösning av tillståndsekvation (tavlan)
- Styrbarhet och observerbarhet (tavlan)

Känslighet – Inverkan av störningar och brus



- Reglerfelet ($e = r - z$) :

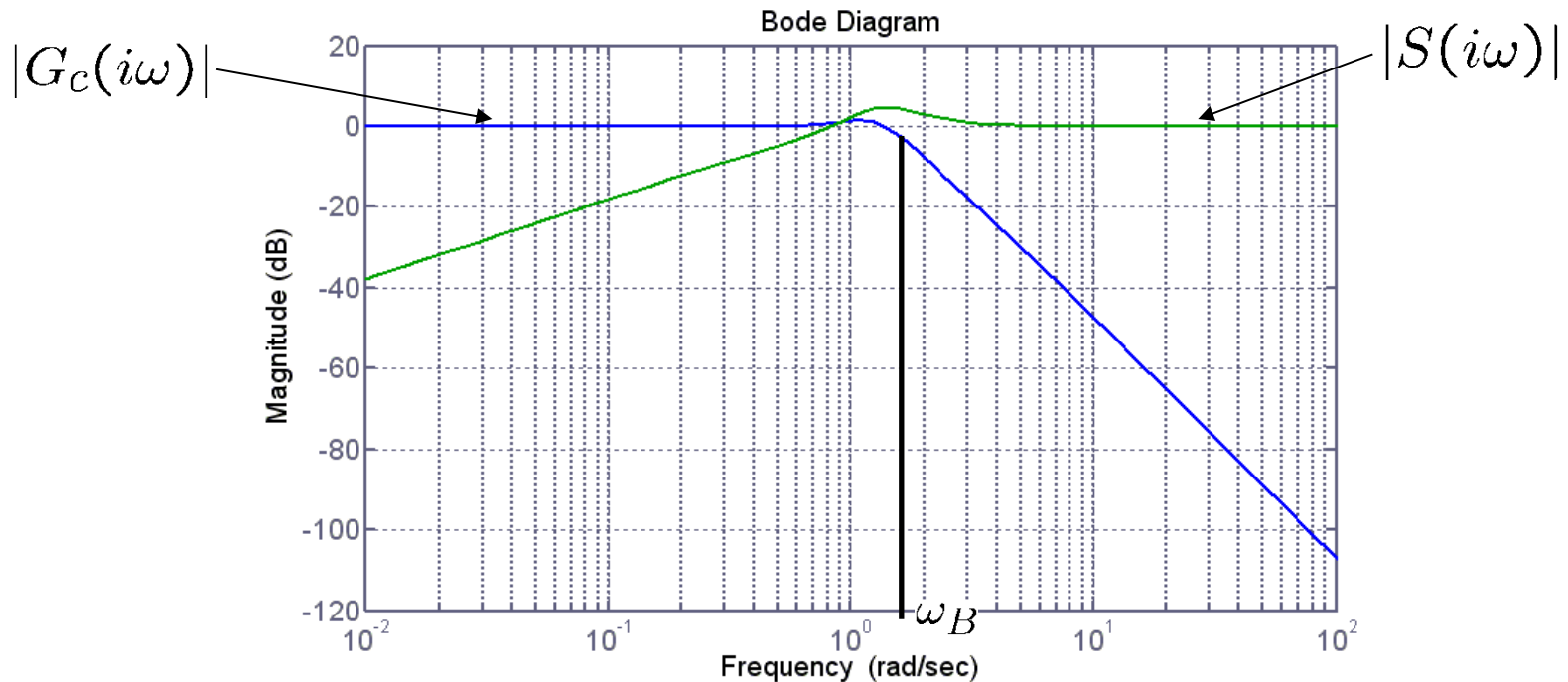
$$E = \underbrace{\frac{1}{1 + GF}}_S R + \underbrace{\frac{GF}{1 + GF}}_{G_C} N - \underbrace{\frac{G}{1 + GF}}_{GS} D$$

- $S(s)$ kallas **känslighetsfunktion**
- Designa $F(s)$ så att
 - $|S(i\omega)|$ litet där referens $|R(i\omega)|$ och störning $|G(i\omega)D(i\omega)|$ stora
 - $|G_C(i\omega)|$ litet där mätbrus $|N(i\omega)|$ och modellfel $|\Delta_G(i\omega)|$ stora

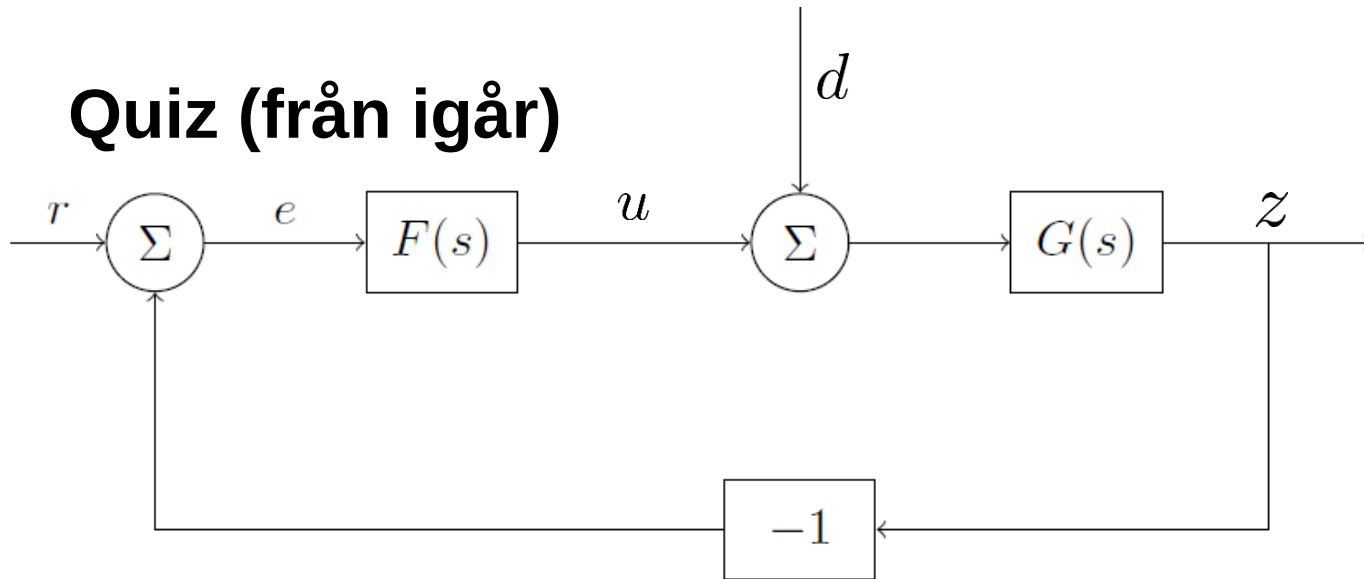
Målkonflikt

- För alla frekvenser ω : $G_C(i\omega) + S(i\omega) = 1$
(Medför $|G_C(i\omega)| + |S(i\omega)| \approx 1$)

- Kompenseringsexempel från Fö. 6:



Quiz (från igår)



(2) Är systemet beskrivet av blockschemat stabilt om

$$F(s) = \frac{s - 2}{s + 1}$$

och

$$G(s) = \frac{s(s + 1)}{s - 2} ?$$

a) Ja

b) Nej

c) Det går inte att avgöra utan mer information.

Intern stabilitet (bonus, finns ej i boken)

Ett slutet system är **internt stabilt** endast om **alla** överföringsfunktionerna ("de fyras gäng")

$$\underbrace{\frac{GF}{1+GF}}_{G_C}, \quad \underbrace{\frac{1}{1+GF}}_S, \quad \underbrace{\frac{G}{1+GF}}_{d \rightarrow z}, \quad \underbrace{\frac{F}{1+GF}}_{r \rightarrow u}$$

är asymptotiskt stabila.

- Varning för förkortning av instabila poler!
- De fyras gäng i quizen:

$$\frac{s}{s+1}, \quad \frac{1}{s+1}, \quad \frac{s}{s-2}, \quad \frac{s-2}{(s+1)^2}$$

Instabil!



Tillståndsmodeller

- Linjär tillståndsbeskrivning

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- Vektorn $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ kallas systemets tillstånd
- $x(t)$ innehåller den information som behövs för att räkna ut framtida $y(t)$, givet framtida $u(t)$

Linjärisering

Givet olinjär modell
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

1. Finn stationär punkt (x_0, u_0) :

$$\dot{x}_0 = 0 = f(x_0, u_0)$$

2. För små avvikelser Δx , Δu från stationär punkt gäller Taylorutvecklingen

$$\frac{d}{dt}\Delta x = \underbrace{f_x(x_0, u_0)}_A \Delta x + \underbrace{f_u(x_0, u_0)}_B \Delta u$$

3. Motsvarande approximation för y

$$\Delta y = \underbrace{h_x(x_0, u_0)}_C \Delta x + \underbrace{h_u(x_0, u_0)}_D \Delta u$$



Fördelar med tillståndsmodeller

- Naturligt vid modellbygge
- Tillstånd har ofta fysikalisk betydelse
- Lämpligt vid datorsimulering
- Återkoppling med flera mätsignaler på systematiskt sätt
- System med flera in- och utsignaler behandlas på samma sätt



Dagens program

- Känslighet (repetition, slides)
- Tillståndsmodeller
 - Linjärisering (repetition, slides)
 - $G(s) \leftrightarrow$ **tillståndsmodell (tavlan)**
 - Poler från tillståndsmodell (tavlan)
- Lösning av tillståndsekvation (tavlan)
- Styrbarhet och observerbarhet (tavlan)

Quiz

(1) Betrakta differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Vilken tillståndsbeskrivning motsvarar den?

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$

Quiz

(2) Om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

vad är då e^{At} ?

a)

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & -2e^t \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}$$



Quiz

(3) Vilken styrbarhetsmatrix motsvarar **inte** ett styrbart system?

a) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) Vad krävs av konstanten a i $\mathcal{O}$ för att systemet ska vara observerbart?

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

a) $a = 0$

b) $a \neq 0$

c) $a < 0$

d) $a > 0$