KTH ROYAL INSTITUTE
OF TECHNOLOGY

EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 8:
Styrbarhet och observerbarhet

Halvtidsutvärderingen – Lite återkoppling

- 1/3 i fas, 1/3 inte i fas, 1/3 sådär. Många tycker det går fort fram…
- **Föreläsningar:** Repetition i början bra, använd inte för många slides (OK), mer sidhänvisningar (OK), ange engelska uttryck (se ordlista), mer (svåra) räkneexempel (nja)
- **Övningar:** För mycket teori (OK), för snabbt/för långsamt, jobbigt med olika språk, tydligare med att förklara vad som söks och varför, schemakrockar
- **Lab 1:** Bra, långsam, använd mer simulering (nja)

Kursinfo: Extra räknestuga

- Extra räknestugor:
  - Måndag, 1 december, 13:15 – 15:00 i E33
  - Måndag, 8 december, 10:15 – 12:00 i Q24

- Övningsgrupp 5 inställd
  - Tisdag, 25 november, 13:15-15:00
  - Fredag, 28 november, 8:15-10:00

(Övningsgrupp 4 som vanligt)

Dagens program

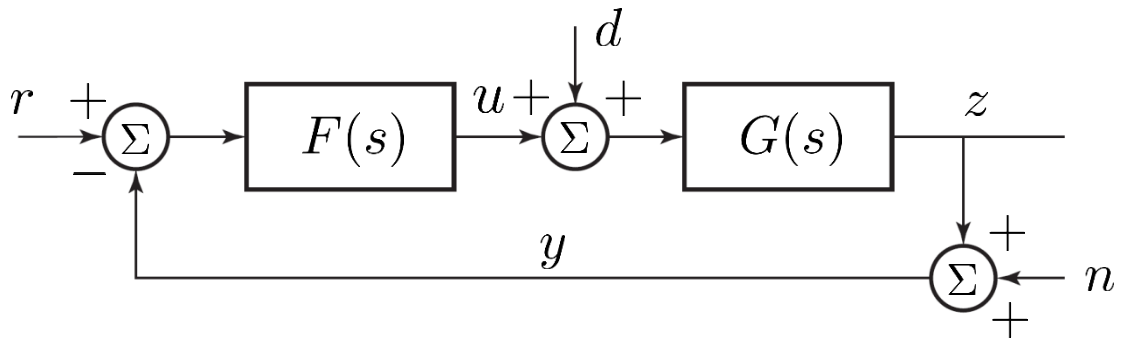
- Känslighet (repetition, slides)

- Tillståndsmodeller
  - Linjärisering (repetition, slides)
  - $G(s) \leftrightarrow$ tillståndsmodell (tavlan)
  - Poler från tillståndsmodell (tavlan)

- Lösning av tillståndsekvation (tavlan)

- Styrbarhet och observerbarhet (tavlan)

Känslighet – Inverkan av störningar och brus



- Reglerfelet $(e = r - z)$:

$$E = \underbrace{\frac{1}{1+GF}}_{S} R + \underbrace{\frac{GF}{1+GF}}_{G_C} N - \underbrace{\frac{G}{1+GF}}_{GS} D$$

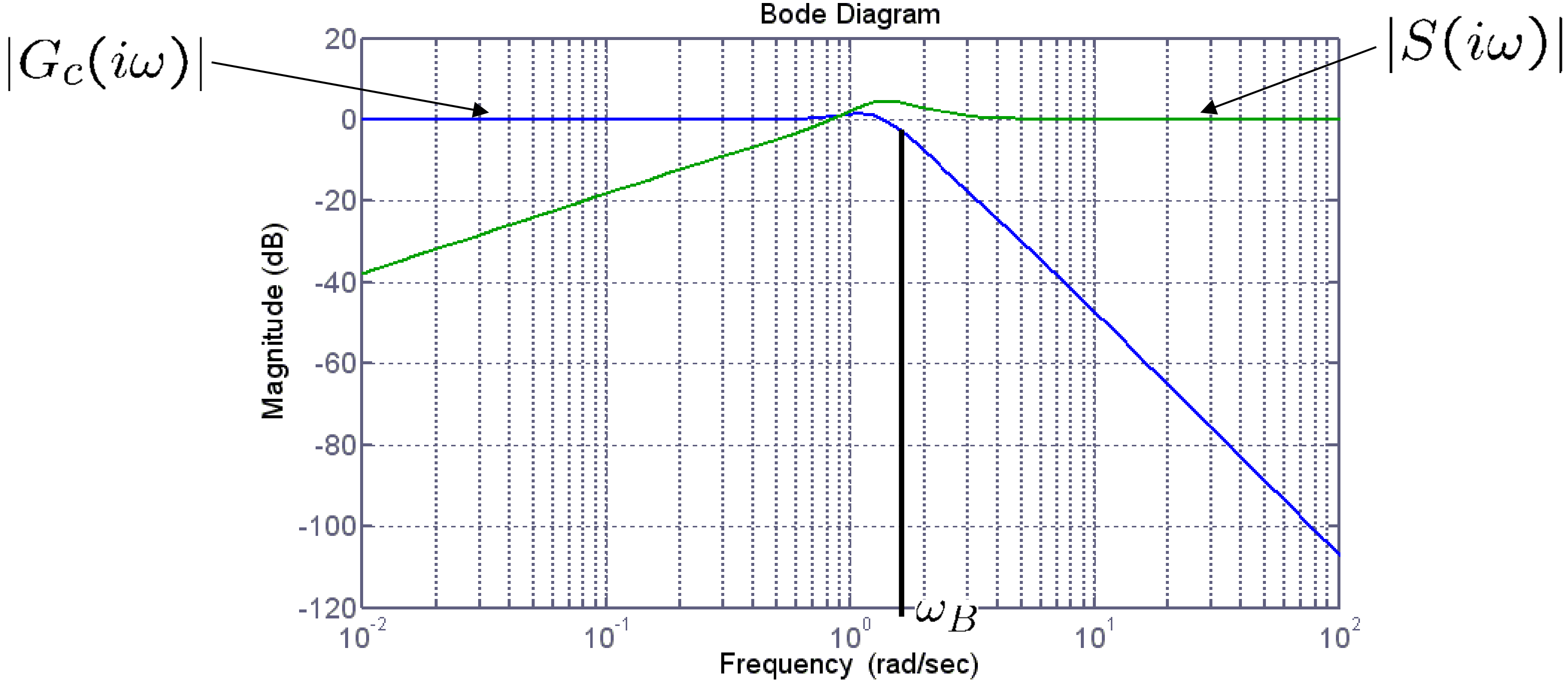
- $S(s)$ kallas **känslighetsfunktion**
- Designa $F(s)$ så att
  - $|S(i\omega)|$ litet där referens $|R(i\omega)|$ och störning $|G(i\omega)D(i\omega)|$ stora
  - $|G_C(i\omega)|$ litet där mätbrus $|N(i\omega)|$ och modellfel $|\Delta_G(i\omega)|$ stora

Målkonflikt

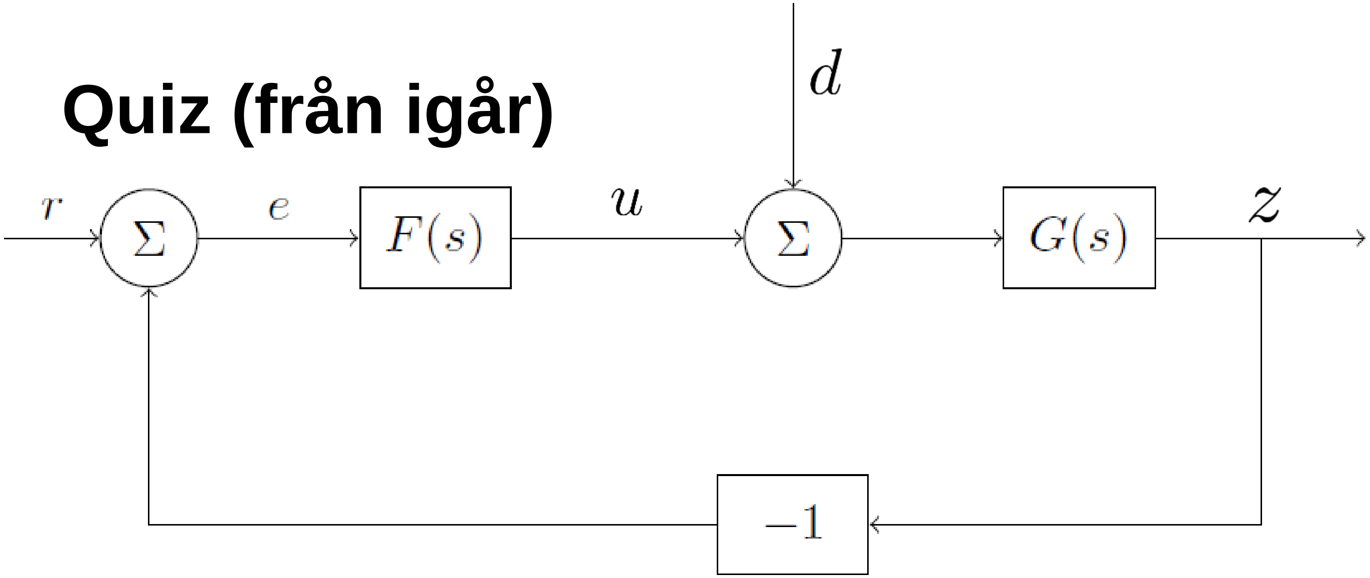
- För alla frekvenser ω : $G_C(i\omega) + S(i\omega) = 1$

  (Medför $|G_C(i\omega)| + |S(i\omega)| \approx 1$)

- Kompenseringsexempel från Fö. 6:



Quiz (från igår)



(2) Är systemet beskrivet av blockschemat stabilt om

$$F(s) = \frac{s-2}{s+1}$$

och

$$G(s) = \frac{s(s+1)}{s-2}\ ?$$

a) Ja
b) Nej
c) Det går inte att avgöra utan mer information.

Intern stabilitet (bonus, finns ej i boken)

Ett slutet system är **internt stabilt** endast om **alla** överföringsfunktionerna (”de fyras gäng”)

$$\underbrace{\frac{GF}{1+GF}}_{G_C}, \quad \underbrace{\frac{1}{1+GF}}_{S}, \quad \underbrace{\frac{G}{1+GF}}_{d \to z}, \quad \underbrace{\frac{F}{1+GF}}_{r \to u}$$

är asymptotiskt stabila.

- Varning för förkortning av instabila poler!
- De fyras gäng i quizen:

$$\frac{s}{s+1}, \quad \frac{1}{s+1}, \quad \boxed{\frac{s}{s-2}}, \quad \frac{s-2}{(s+1)^2}$$

Instabil!

Tillståndsmodeller

- Linjär tillståndsbeskrivning

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Vektorn $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ kallas systemets tillstånd

- $x(t)$ innehåller den information som behövs för att räkna ut framtida $y(t)$, givet framtida $u(t)$

Linjärisering

Givet olinjär modell $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases}$

1. Finn stationär punkt (x_0, u_0):

$$\dot{x}_0 = \boxed{0 = f(x_0, u_0)}$$

2. För små avvikelser $\Delta x,\ \Delta u$ från stationär punkt gäller Taylorutvecklingen

$$\frac{d}{dt}\Delta x = \underbrace{f_x(x_0,u_0)}_{A}\Delta x + \underbrace{f_u(x_0,u_0)}_{B}\Delta u$$

3. Motsvaranade approximation för y

$$\Delta y = \underbrace{h_x(x_0,u_0)}_{C}\Delta x + \underbrace{h_u(x_0,u_0)}_{D}\Delta u$$

Fördelar med tillståndsmodeller

- Naturligt vid modellbygge
- Tillstånd har ofta fysikalisk betydelse
- Lämpligt vid datorsimulering
- Återkoppling med flera mätsignaler på systematiskt sätt
- System med flera in- och utsignaler behandlas på samma sätt

Dagens program

- Känslighet (repetition, slides)
- Tillståndsmodeller
  - Linjärisering (repetition, slides)
  - $G(s) \leftrightarrow$ **tillståndsmodell (tavlan)**
  - Poler från tillståndsmodell (tavlan)
- Lösning av tillståndsekvation (tavlan)
- Styrbarhet och observerbarhet (tavlan)

Quiz

(1) Betrakta differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Vilken tillståndsbeskrivning motsvarar den?

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

Quiz

(2) Om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

vad är då e^{At}?

a)

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & -2e^t \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}$$

Quiz

(3) Vilken styrbarhetsmatris motsvarar **inte** ett styrbart system?

a) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) Vad krävs av konstanten a i $\mathcal{O}$ för att systemet ska vara observerbart?

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

a) $a = 0$ b) $a \neq 0$
c) $a < 0$ d) $a > 0$