**SF1625 Envariabelanalys**
**Kompletteringstentamen**
**Måndagen den 24 november 2014**

Skrivtid: 17.15-18.45 Tillåtna hjälpmedel: inga Examinator: Lars Filipsson

1. Betrakta funktionen $f(x) = x - \ln 2x$, definierad för $x > 0$.
   A. Skissa, med hjälp av bland annat en derivataundersökning, kurvan $y = f(x)$.
   B. Avgör om $f$ antar något största respektive minsta värde och bestäm i förekommande fall dessa.

   Lösning: Vi deriverar och får (efter förenkling) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ som existerar för alla $x > 0$ och som är $= 0$ om och endast om $x = 1$. Vi har alltså en kritisk punkt $x = 1$. Teckenstudium av derivatan ger:

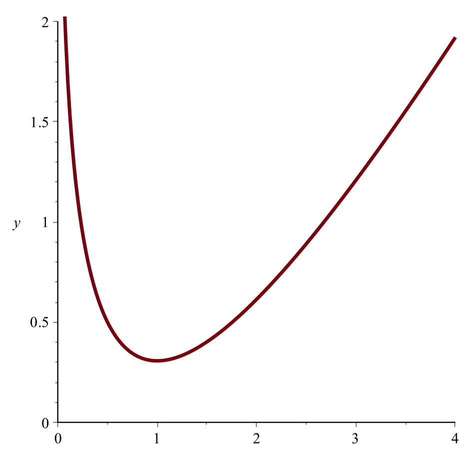
   Om $0 < x < 1$ så är $f'(x) < 0$ och det följer att $f$ är strängt avtagande här.

   Om $x = 1$ så är $f'(x) = 0$

   Om $x > 1$ så är $f'(x) > 0$ och det följer att $f$ är strängt växande här.

   Av ovanstående följer att $f$ har exakt en lokal extrempunkt, ett lokalt och globalt minimum i $x = 1$. Funktionen antar alltså ett minsta värde, nämligen $f(1) = 1 - \ln 2$.

   Vi beräknar de relevanta gränsvärdena: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Det följer av detta att funktionen saknar största värde. Nu kan vi skissa kurvan




   SVAR. A. Se lösningen. B. Minsta värdet är $1 - \ln 2$ och största värde saknas.

2. Beräkna nedanstående integraler.

   A. $\int_0^{1/2} xe^{2x}\,dx$ (använd partiell integration)

   B. $\int_0^{\pi/6} (\sin x)^2 \cos x\,dx$ (använd substitutionen $\sin x = u$)

   Lösning:

   A. Vi använder partiell integration och får

$$\int_0^{1/2} xe^{2x}\,dx = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{e^{2x}}{2}\,dx = ... = \frac{1}{4}.$$

   B. Vi använder substitutionen $\sin x = u$ med $\cos x\,dx = du$ och nya gränser $0$ och $1/2$ och får

$$\int_0^{\pi/6} (\sin x)^2 \cos x\,dx = \int_0^{1/2} u^2\,du = \frac{1}{24}.$$

   SVAR. A. $1/4$. B. $1/24$

3. Finn den lösning $y(t)$ till differentialekvationen $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 8$ som också uppfyller initialvillkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = -2$

Lösning. Lösningen $y$ till differentialekvationen i uppgiften fås som $y = y_h + y_p$ där $y_h$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och $y_p$ är någon partikulärlösning.

Först söks $y_h$. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 4r + 4 = 0$ har lösning $r = -2$ varför

$$y_h(t) = (At + B)e^{-2t}, \quad \text{för godtyckliga konstanter } A \text{ och } B.$$

Sedan söks $y_p$. Eftersom högerledet är konstant ansätter vi $y_p = C$. Då är $y_p'' + 4y_p' + 4y_p = 4C$ vilket är lika med $8$ när $C = 2$. Vi har alltså en partikulärlösning $y_p(t) = 2$.

Lösningen till differentialekationen i uppgiften är alltså $y(t) = (At + B)e^{-2t} + 2$, för godtyckliga konstanter $A$ och $B$.

Till sist använder vi initialvillkoren för att bestämma konstanterna. Vi ser först att $y(0) = 2$ om och endast om $B + 2 = 2$, dvs $B = 0$. Sedan ser vi att med $B = 0$ så är $y'(0) = -2$ om och endast om $A = -2$.

Så vi ser att den lösning till differentialekvationen i uppgiften som också uppfyller initialvillkoren är $y(t) = -2te^{-2t} + 2$.

SVAR. $y(t) = -2te^{-2t} + 2$.