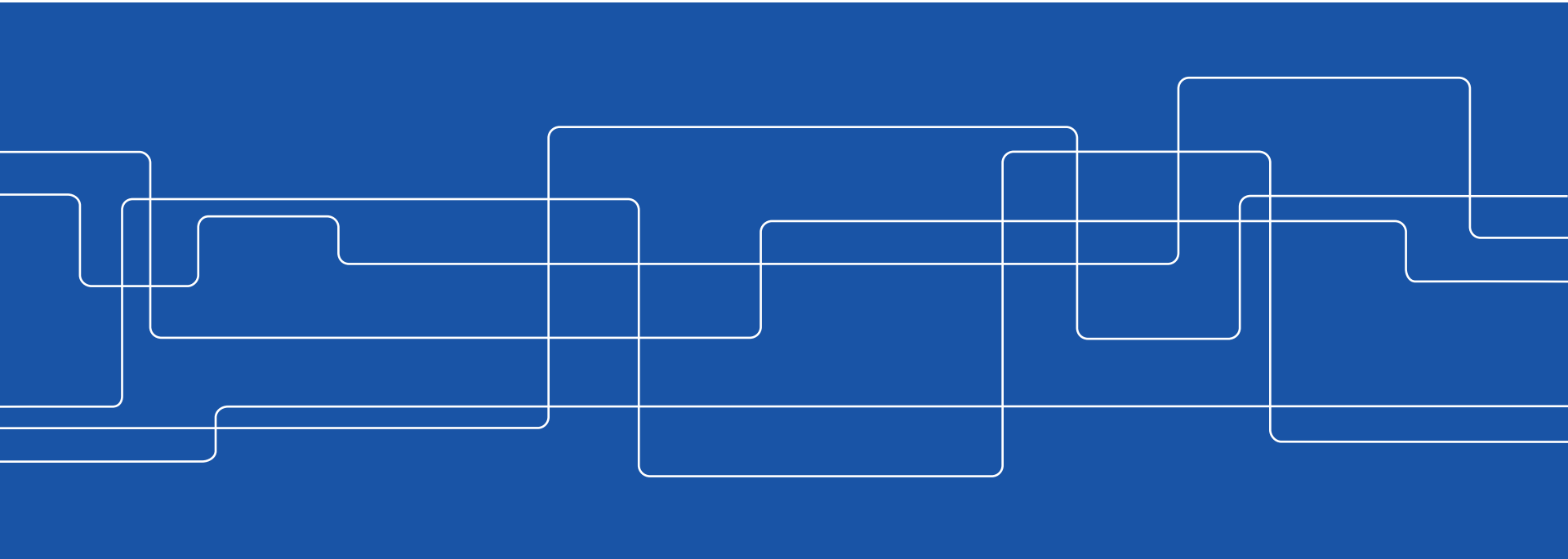


EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 9: Tillståndsåterkoppling och observatör





Kursinfo: Tentamen

- Ordinarie tentamenstillfälle är lördagen den 17/1 kl.09.00-14.00
- Obligatorisk föranmälan ska ske senast två veckor före tentamentillfället på Mina sidor (Mina sidor-Tentamen-Mina tentor)
- Tillåtet att gå upp på omtenta för EL1000 period 1 istället (fredagen den 9/1 kl.08.00-13.00)
- **OBS! Ej tillåtet att gå upp på båda dessa tentor. Välj en!**



Dagens program

- Lösning av tillståndsekvation (repetition, slides)
- Styrbarhet och observerbarhet (repetition, slides)
- Tillståndsåterkoppling (tavlan)
- Observatör (tavlan)

Optimering av kvadratiska kriterier, Glad & Ljung kapitel 9.3 ingår ej. Se fortsättningskurser i reglerteknik.

Tillståndsmodeller

- Linjär tillståndsbeskrivning

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

- Vektorn $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ kallas systemets tillstånd
- $x(t)$ innehåller den information som behövs för att räkna ut framtida $y(t)$, givet framtida $u(t)$
- Lösningsformel:
$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$
- Matrisexponentialfunktion: e^{At}

Styrbarhet (Resultat 8.8)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t) &\in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & u(t), y(t) &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tillståndsmodell styrbar: Kan styra från $x(0) = 0$ till vilket tillstånd $x(T) = x^*$ som helst m.h.a. u , på ändlig tid T

$\Leftrightarrow$

Styrbarhetsmatrisen $\mathcal{S}$ har full rang

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} A & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\Leftrightarrow$

$$\det(\mathcal{S}) \neq 0$$

Observerbarhet (Resultat 8.9, nytt)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t) &\in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & u(t), y(t) &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tillståndsmodell observerbar: Finns inget initialtillstånd

$x(0) = x^* \neq 0$ så att $y(t) = 0, t \geq 0$ då $u(t) = 0, t \geq 0$

$\Leftrightarrow$

Observerbarhetsmatrisen $\mathcal{O}$ har full rang

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

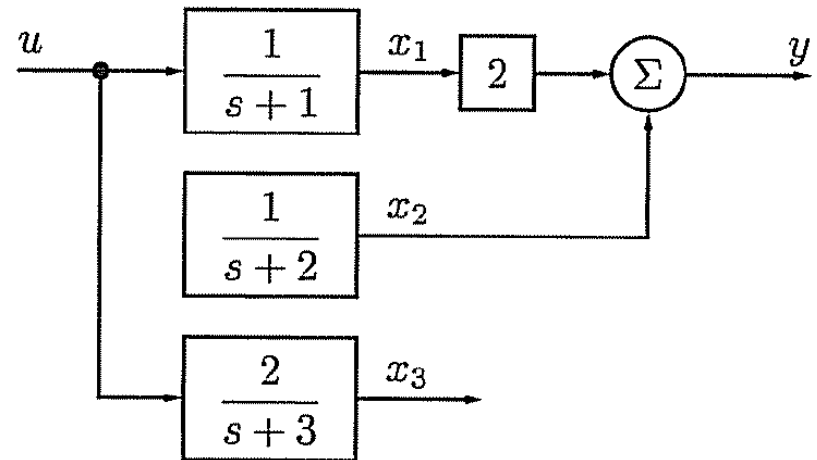
$\Leftrightarrow$

$$\det(\mathcal{O}) \neq 0$$

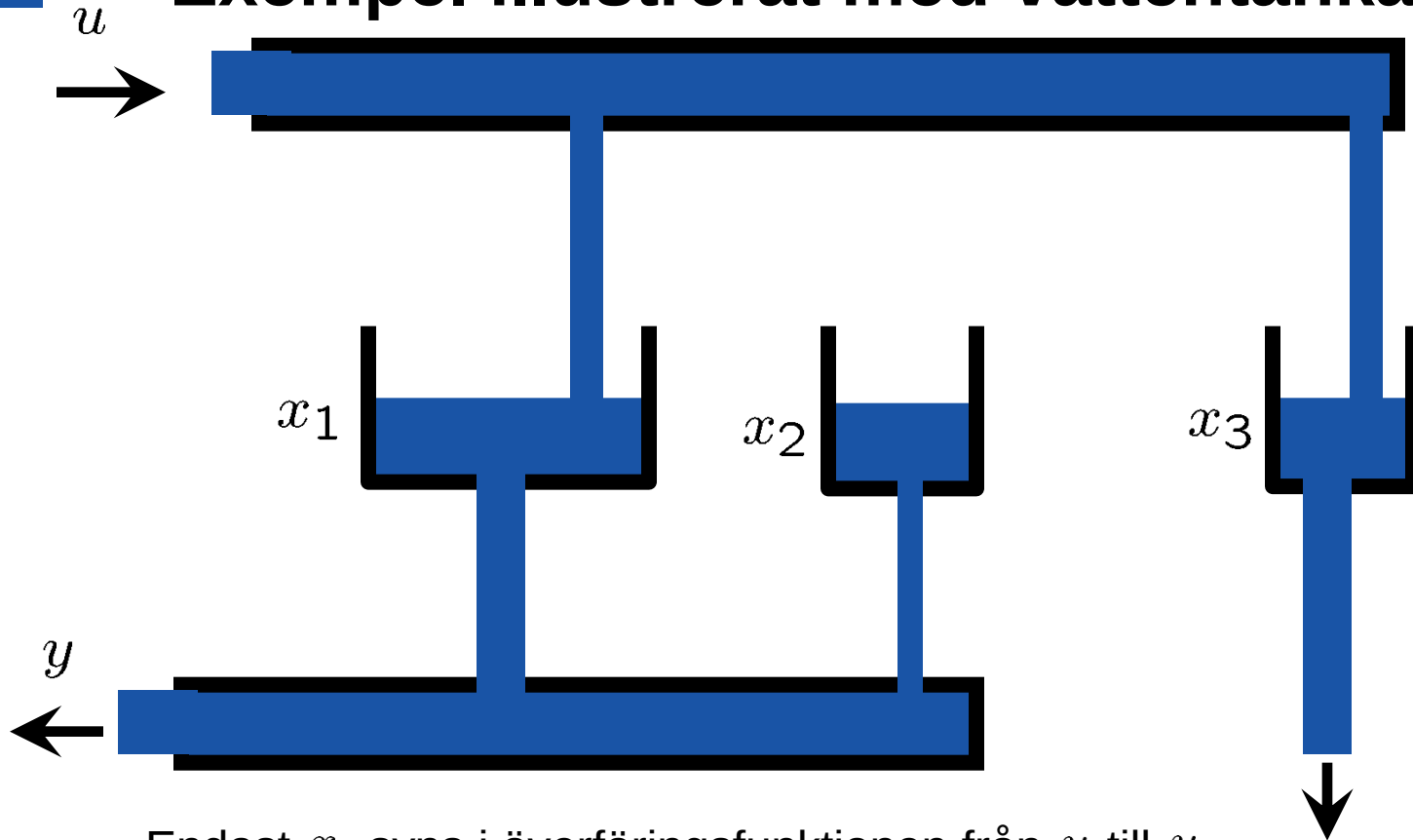
Exempel från Föreläsning 8

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

x_2 ej styrbar
 x_3 ej observerbar



Exempel illustrerat med vattentankar



Endast x_1 syns i överföringsfunktionen från u till y
 x_2 påverkas ej av
 x_3 syns ej i



Minimala tillståndsmodeller (Resultat 8.11, nytt)

- Förkortningar av poler och nollställena i $G(s)$ beror på icke-observerbara eller icke-styrbara tillstånd
- Minimala tillståndsmodeller: Alla tillstånd styrbara och observerbara

$$\det(\mathcal{S}) \neq 0 \quad \text{och} \quad \det(\mathcal{O}) \neq 0$$

- $G(s)$ ger en **yttre** beskrivning av systemet
- Tillståndsmodellen ger en **inre** beskrivning av systemet

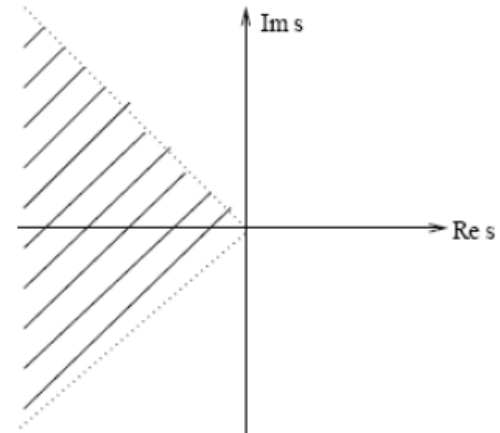


Dagens program

- Återkoppling från systemets samtliga tillstånd $x(t)$:
Tillståndsåterkoppling
- Skattning av tillståndet $x(t)$ från mätning av utsignalen $y(t)$:
Observatör (observerare)

Var ska polerna placeras?

- Valet av slutna systemets poler styrs av specifikationer på:
 - Önskad snabbhet och dämpning
 - Begränsningar på styrsignalens storlek
 - Robusthet (mot modellfel)
 - Känslighet (mot yttre störningar)
- Allmänna råd:
 - Flytta polerna iterativt tills specifikationer uppfyllda
 - Poler närmast origo viktigast
 - Välj poler som ger bra avvägning mellan snabbhet och dämpning



Typexempel: Polplacering

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\zeta = \cos(\phi)$$

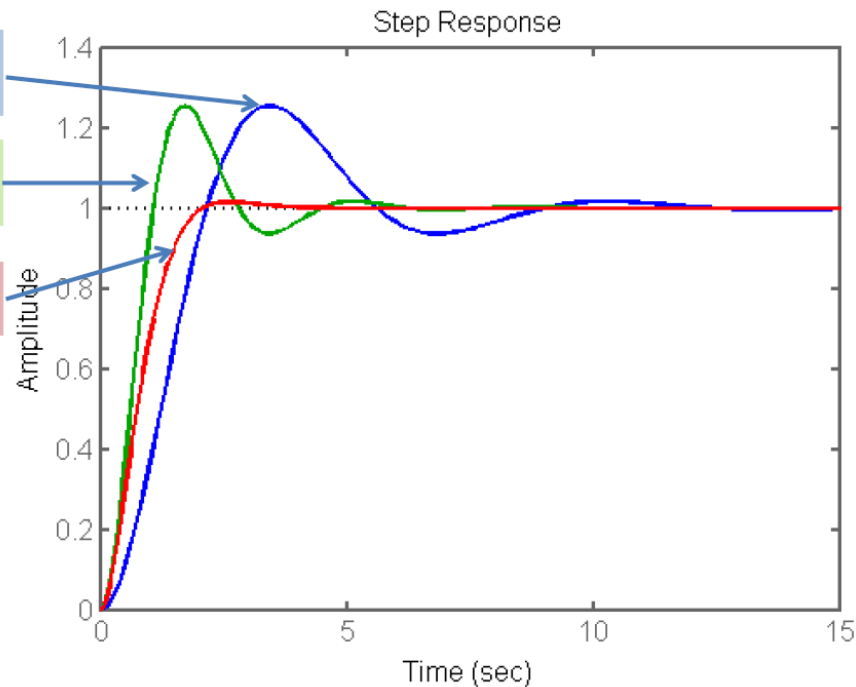
Snabbhet: $\sim 1/\text{stigtid} \approx \omega_0 e^{-\phi/\tan(\phi)}$

Dämpning: $\sim 1/\text{översläng} \approx e^\alpha, \alpha = \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$\omega_0 = 1, \zeta = 0.4$$

$$\omega_0 = 2, \zeta = 0.4$$

$$\omega_0 = 2, \zeta = 0.8$$

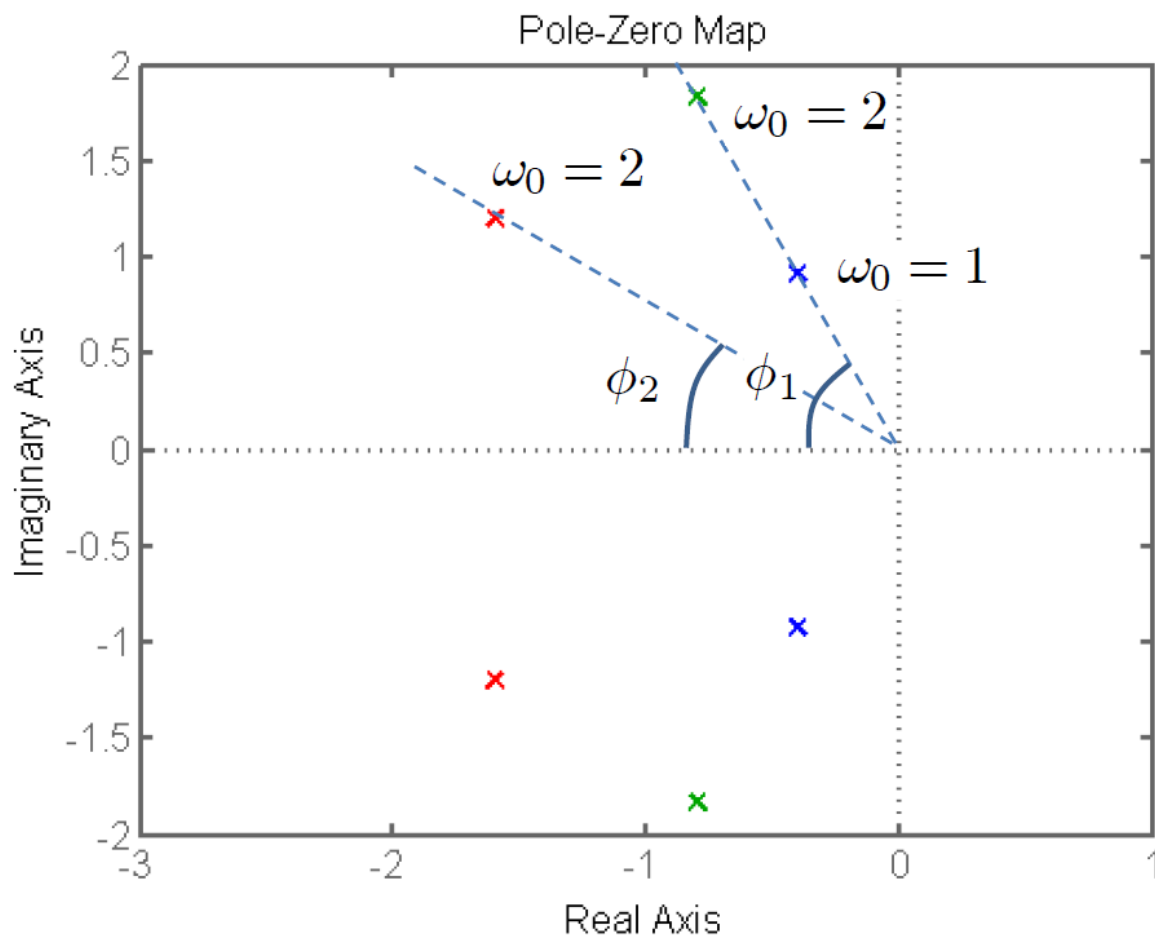


(Glad & Ljung:
Exempel 3.3)

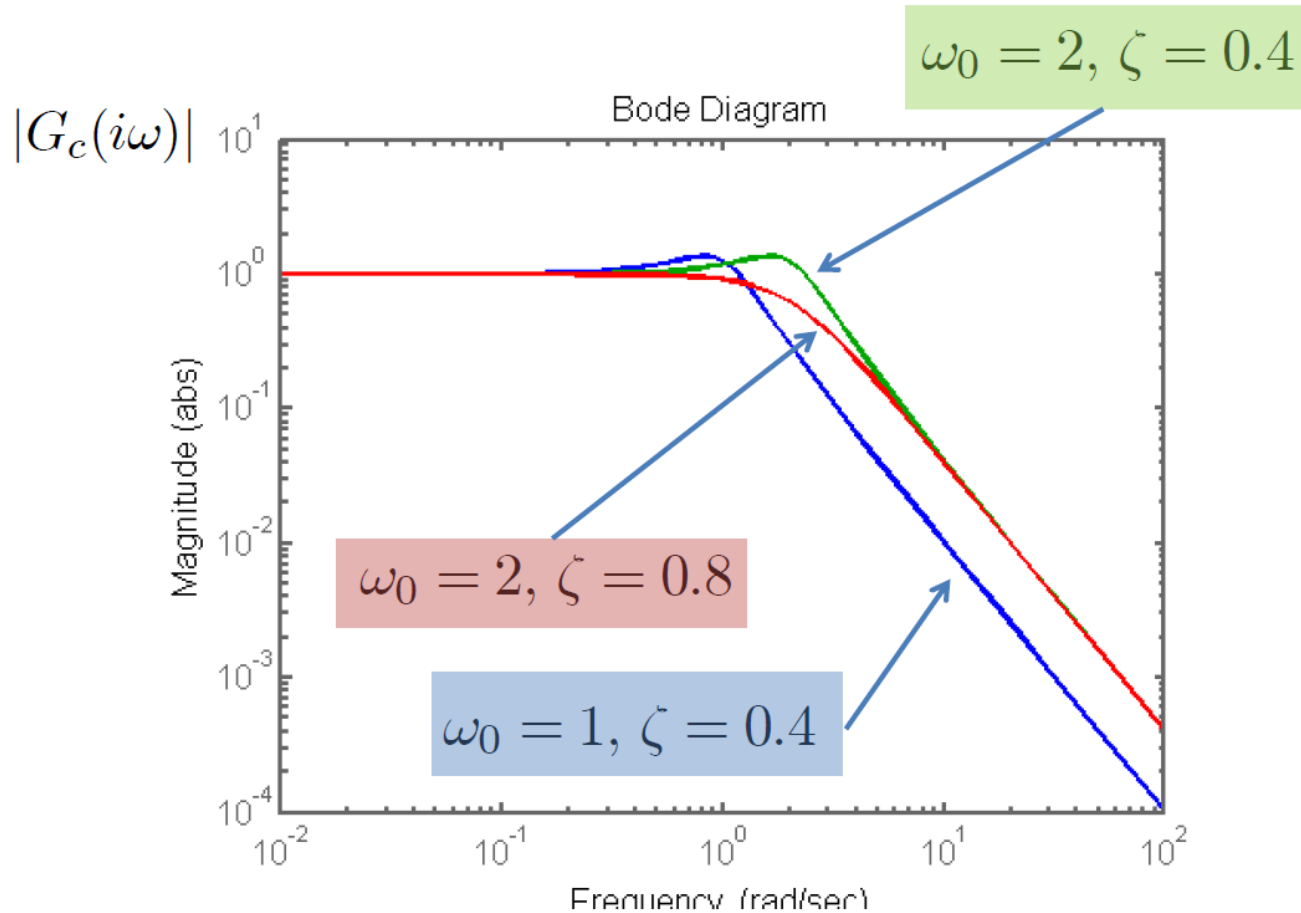
Typexempel: Polplacering

$$\phi_1 = \arccos 0.4$$

$$\phi_2 = \arccos 0.8$$



Typexempel: Polplacering





Quiz

Är systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

styrbart?



Quiz

Antag systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

ska styras med tillståndsåterkopplingen

$$u = - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x + l_0 r$$

- Hur ska l_1 , l_2 väljas så att polerna hamnar i $\{-1 - i, -1 + i\}$?
- Hur bör man välja l_0 ?