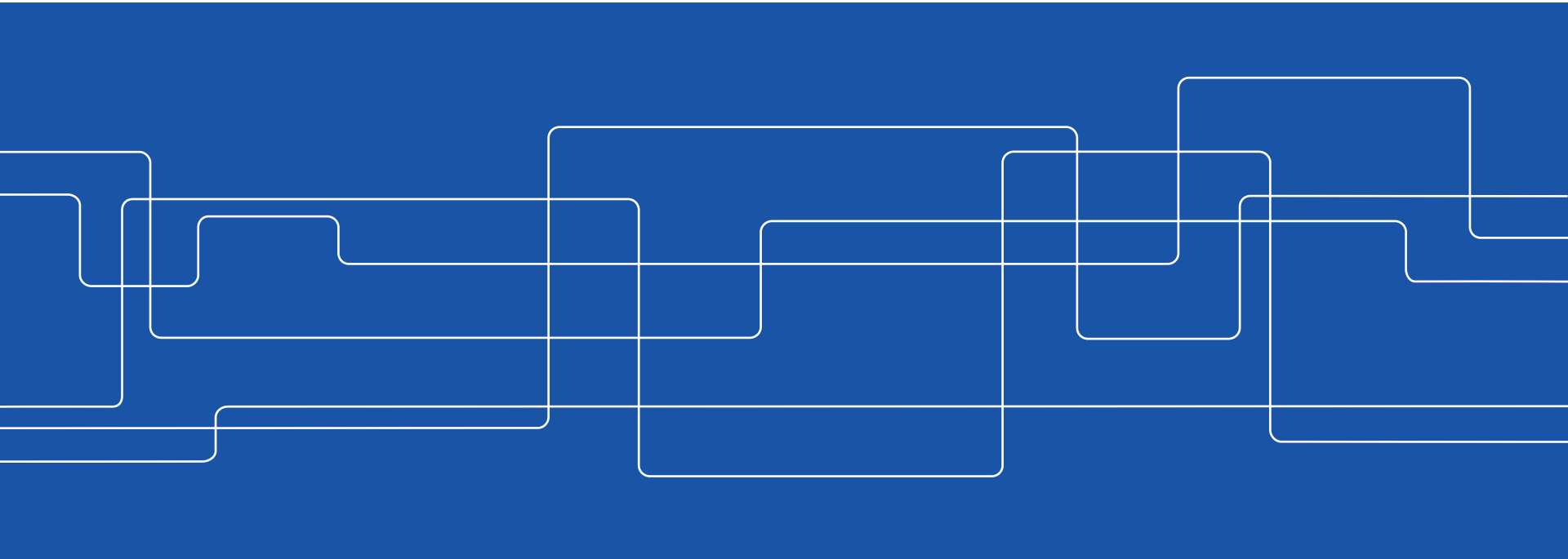




# EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

## Föreläsning 9: Tillståndåterkoppling och observatör





# Kursinfo: Tentamen

- Ordinarie tentamenstillfälle är lördagen den 17/1 kl.09.00-14.00
- Obligatorisk föranmälan ska ske senast två veckor före tentamentillfället på Mina sidor (Mina sidor-Tentamen-Mina tentor)
- Tillåtet att gå upp på omtenta för EL1000 period 1 istället (fredagen den 9/1 kl.08.00-13.00)
- **OBS! Ej tillåtet att gå upp på båda dessa tentor. Välj en!**



# Dagens program

- Lösning av tillståndsekvation (repetition, slides)
- Styrbarhet och observerbarhet (repetition, slides)
- Tillståndsåterkoppling (tavlan)
- Observatör (tavlan)

Optimering av kvadratiska kriterier, Glad & Ljung kapitel 9.3 ingår ej. Se fortsättningskurser i reglerteknik.



# Tillståndsmodeller

- Linjär tillståndsbeskrivning

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

- Vektorn  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$  kallas systemets tillstånd
- $x(t)$  innehåller den information som behövs för att räkna ut framtida  $y(t)$ , givet framtida  $u(t)$

- Lösningsformel:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

- Matrisexponentialfunktion:  $e^{At}$



## Styrbarhet (Resultat 8.8)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t) &\in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & u(t), y(t) &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

**Tillståndsmodell styrbar:** Kan styra från  $x(0) = 0$  till vilket tillstånd  $x(T) = x^*$  som helst m.h.a.  $u$ , på ändlig tid  $T$

$\Leftrightarrow$

Styrbarhetsmatrisen  $\mathcal{S}$  har full rang

$$\mathcal{S} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\Leftrightarrow$

$$\det(\mathcal{S}) \neq 0$$



## Observerbarhet (Resultat 8.9, nytt)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t) &\in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & u(t), y(t) &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

**Tillståndsmodell observerbar:** Finns inget initialtillstånd  $x(0) = x^* \neq 0$  så att  $y(t) = 0, t \geq 0$  då  $u(t) = 0, t \geq 0$

$\Leftrightarrow$

Observerbarhetsmatrisen  $\mathcal{O}$  har full rang

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\Leftrightarrow$

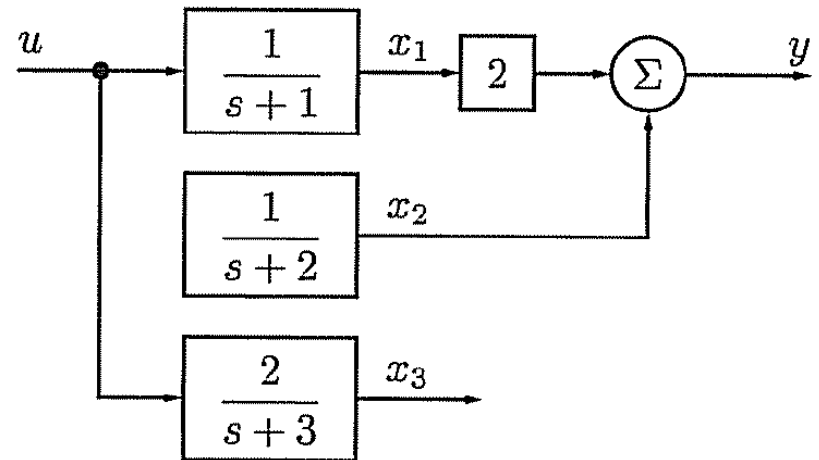
$$\det(\mathcal{O}) \neq 0$$

## Exempel från Föreläsning 8

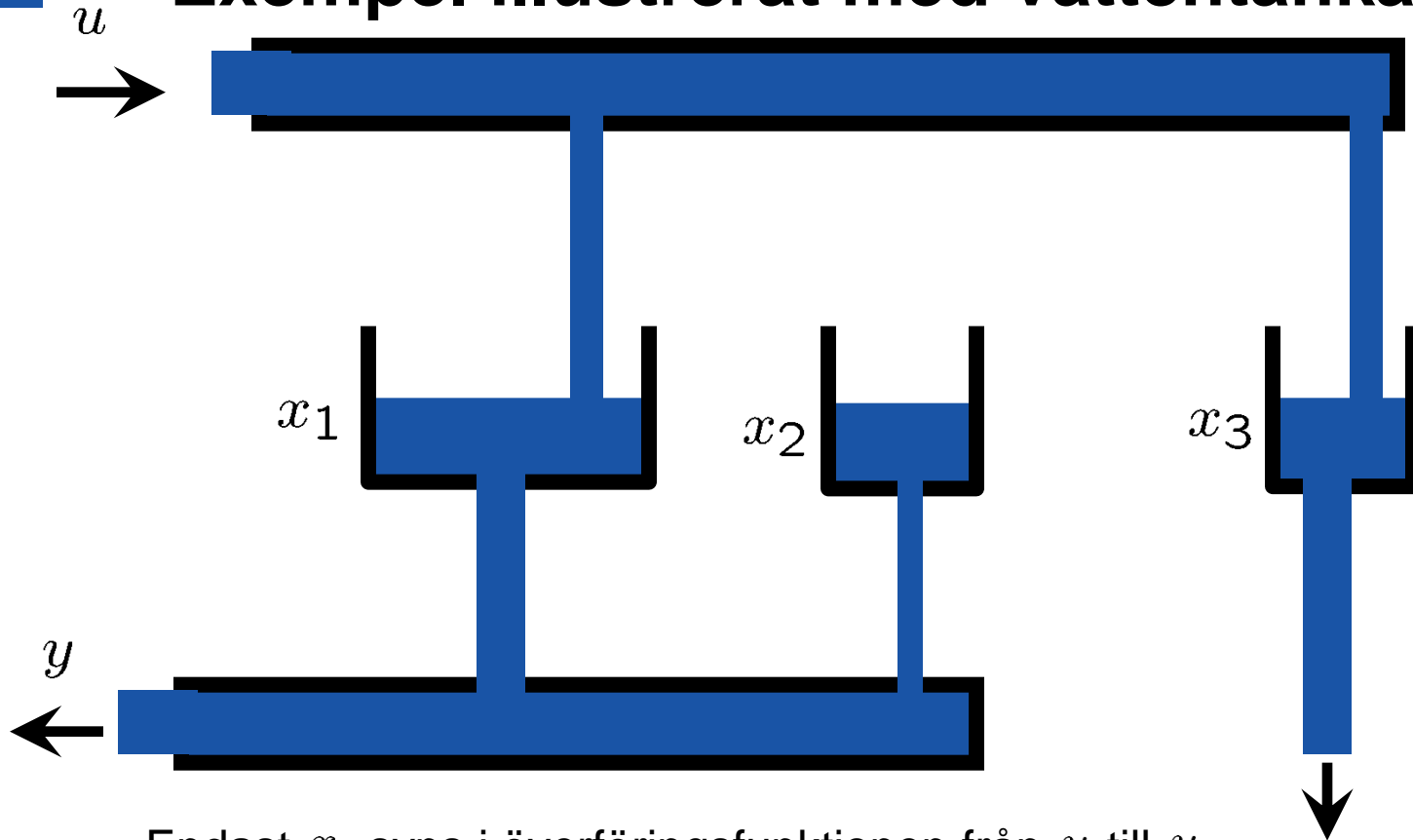
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

$x_2$  ej styrbar  
 $x_3$  ej observerbar



## Exempel illustrerat med vattentankar



Endast  $x_1$  syns i överföringsfunktionen från  $u$  till  $y$

$x_2$  påverkas ej av

$x_3$  syns ej i





# Minimala tillståndsmodeller (Resultat 8.11, nytt)

- Förkortningar av poler och nollställen i  $G(s)$  beror på icke-observerbara eller icke-styrbara tillstånd
- Minimala tillståndsmodeller: Alla tillstånd styrbara och observerbara

$$\det(\mathcal{S}) \neq 0 \quad \text{och} \quad \det(\mathcal{O}) \neq 0$$

- $G(s)$  ger en **yttre** beskrivning av systemet
- Tillståndsmodellen ger en **inre** beskrivning av systemet

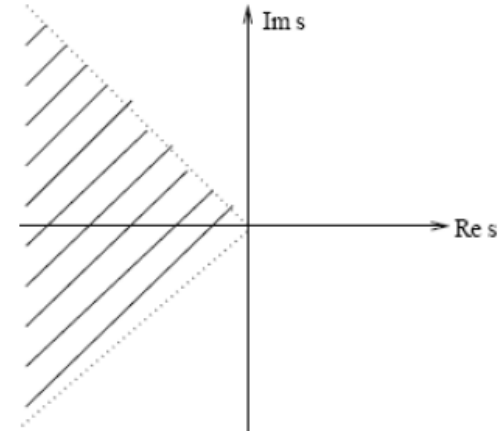


# Dagens program

- Återkoppling från systemets samtliga tillstånd  $x(t)$ :  
Tillstånd återkoppling
- Skattning av tillståndet  $x(t)$  från mätning av utsignalen  $y(t)$ :  
Observatör (observerare)

## Var ska polerna placeras?

- Valet av slutna systemets poler styrs av specifikationer på:
  - Önskad snabbhet och dämpning
  - Begränsningar på styrsignalens storlek
  - Robusthet (mot modellfel)
  - Känslighet (mot yttre störningar)
- Allmänna råd:
  - Flytta polerna iterativt tills specifikationer uppfyllda
  - Poler närmast origo viktigast
  - Välj poler som ger bra avvägning mellan snabbhet och dämpning



# Typexempel: Polplacering

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

$$\zeta = \cos(\phi)$$

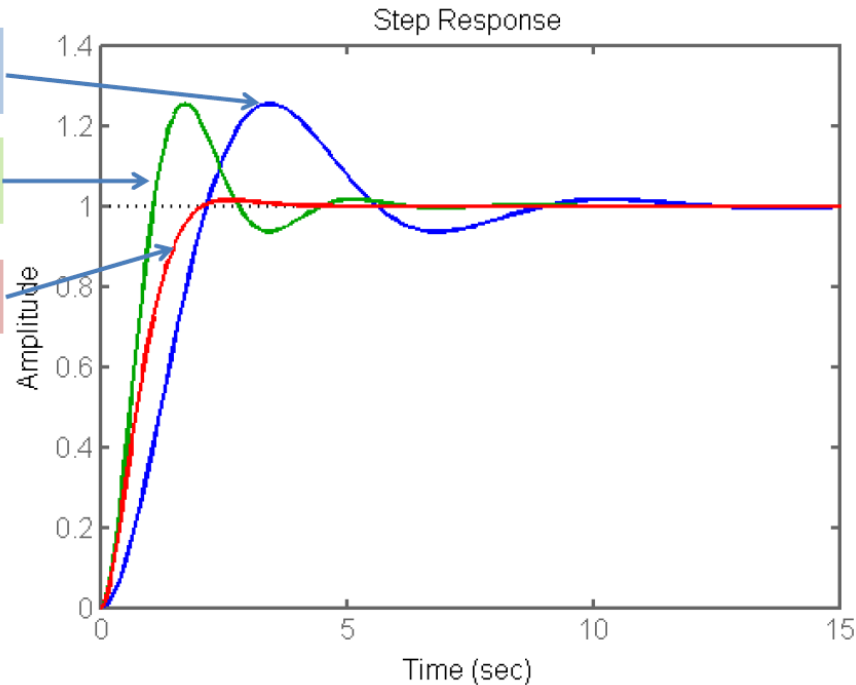
Snabbhet:  $\sim 1/\text{stigtid} \approx \omega_0 e^{-\phi/\tan(\phi)}$

Dämpning:  $\sim 1/\text{översläng} \approx e^\alpha, \alpha = \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\omega_0 = 1, \zeta = 0.4$

$\omega_0 = 2, \zeta = 0.4$

$\omega_0 = 2, \zeta = 0.8$

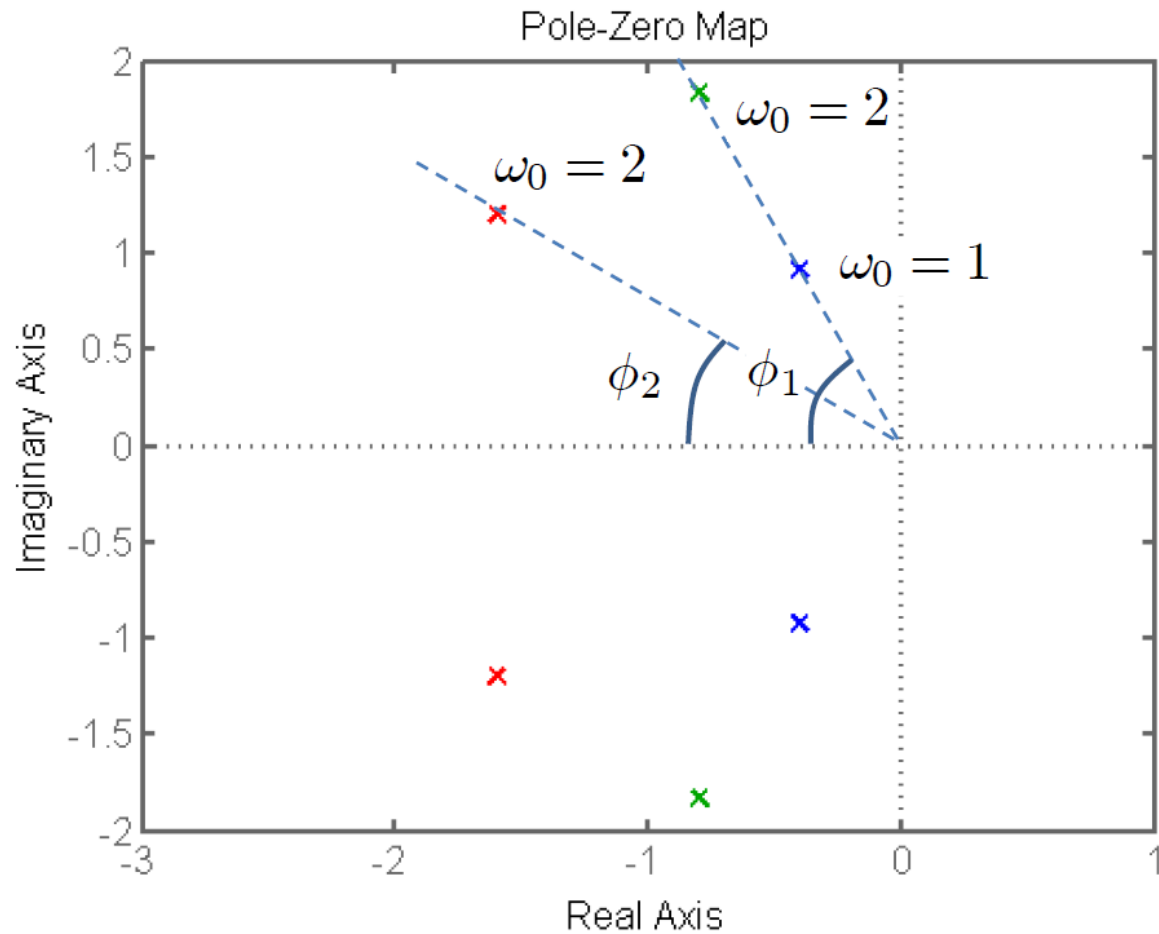


(Glad & Ljung:  
Exempel 3.3)

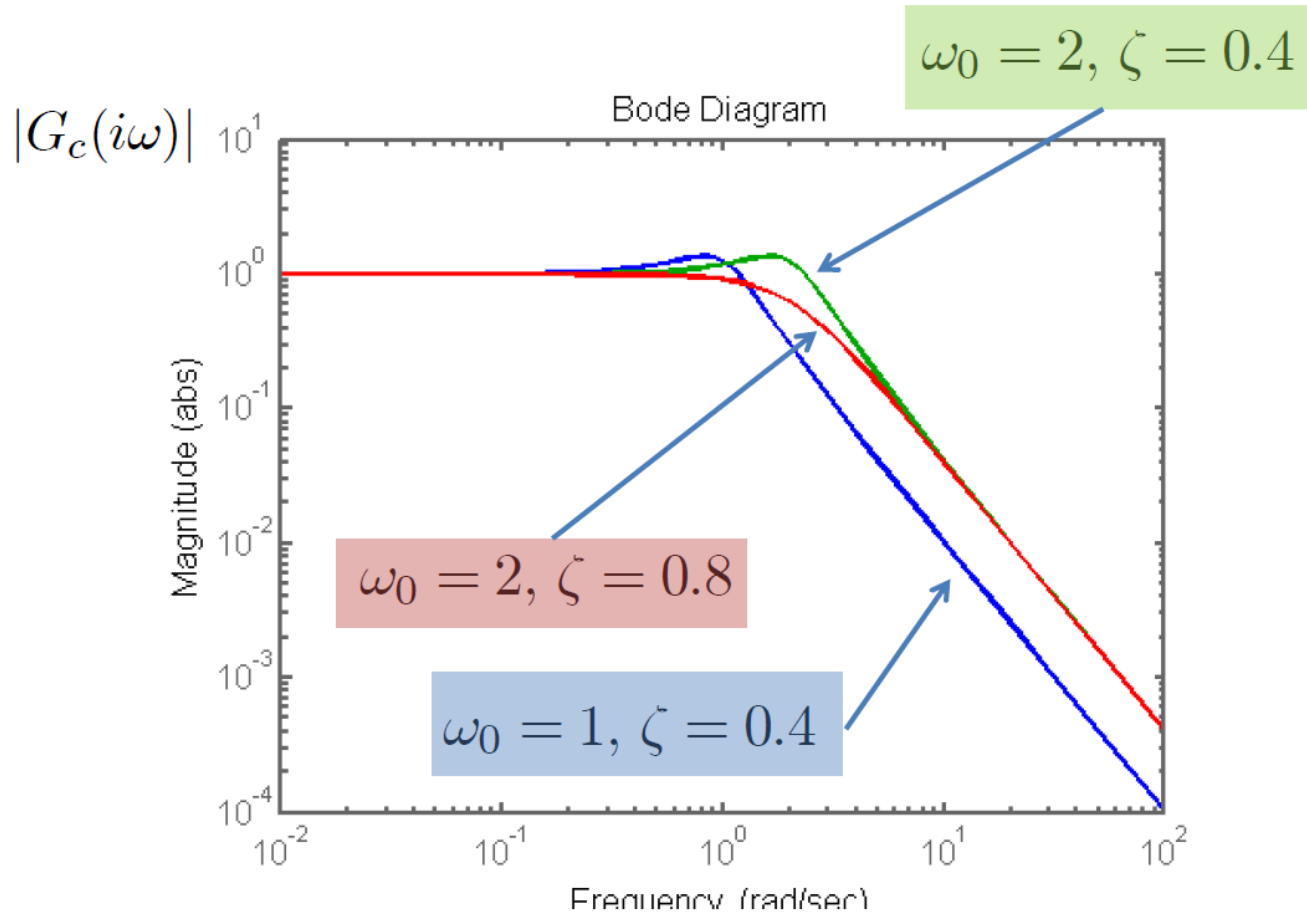
# Typexempel: Polplacering

$$\phi_1 = \arccos 0.4$$

$$\phi_2 = \arccos 0.8$$



# Typexempel: Polplacering





# Quiz

Är systemet (raketen)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

styrbart?



# Quiz

Antag systemet (raketten)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

ska styras med tillståndsåterkopplingen

$$u = - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x + l_0 r$$

- Hur ska  $l_1$ ,  $l_2$  väljas så att polerna hamnar i  $\{-1 - i, -1 + i\}$ ?
- Hur bör man välja  $l_0$ ?