December 9, 2014. Föreläsning 23.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- ortogonala matriser
- Symmetriska matriser

1. **Definition.** En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas för ortogonal om $||f(\vec{v})|| = ||\vec{v}||$ for alla $\vec{v}$ (den bevarar längden).

2. **Proposition.** Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning och A vara matrisen till f. Följande är ekvivalenta:

(1) f är ortogonal.
(2) kolonnerna till A bildar en orthonormal bas till $\mathbb{R}^n$.
(3) raderna till A bildar en orthonormal bas till $\mathbb{R}^n$.
(4) A är inverterbar och A^T är inversen till A.

3. **Proposition.** Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en ortogonal linjär avbildning. Då:

(1) om $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ då $f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) = 0$, dvs f bevarar ortogonalitet
(2) vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är samma som vinkeln mellan $f(\vec{v})$ och $f(\vec{w})$, dvs. f bevarar vinklar
(3) $f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$ för alla vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$, dvs. f bevarar skalär produkt

4. **Proposition.** Låt $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ortogonala linjär avbildningar.

(1) f^{-1} är ortogonal
(2) $f \circ g$ är ortogonal

5. Hitta inversen till följande matris:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Matris A är ortogonal om kolonnerna är ortonormala, dvs, har längden 1 och är vinkelräta mot varadra. An matris A är ortogonal om och endast om den är inverterbar och $A^{-1} = A^T$.

7. **Proposition.** Låt A vara $n \times n$ matris. Följande är ekvivalenta:

(1) A är symetrisk ($A = A^T$).
(2) Det finns en ortonormal bas som består av eigenvektoerer
(3) Det finns en ortogonal matris S så att $S^T AS$ ar diagonal.

8. **Proposition.** En symmetrisk matris A kan altid diagonaliseras. Eigenvektoerna till en symmetrisk matris som motsvarar olika eigenvärden är ortogonala till varandra.

9**. Proposition.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) Kan A diagonaliseras?
(2) Hitta en bas som består av eigenvektorerna till A.
(3) Hitta en ortonormal bas som består av eigenvektorerna till A.
(4) Beräkna A^{100}.

10**. Proposition.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix}$$

(1) Kan A diagonaliseras?
(2) Hitta en bas som består av eigenvektorerna till A.
(3) Hitta en ortonormal bas som består av eigenvektorerna till A.
(4) Beräkna A^{100}.