

Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2

Numeriska metoder BE3002/3

9.00-12.00 18/1 2014

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng.

Det finns två alternativa uppgifter 3.

1. (15p) Vi vill lösa ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Högerledsvektorn $\mathbf{b}$ approximeras av $\tilde{\mathbf{b}}$ med ett relativt fel

$$\|\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\|_{\infty} / \|\mathbf{b}\|_{\infty} \leq 0.1.$$

Om $A\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$, hur stort kan det relativa felet

$$\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_{\infty} / \|\mathbf{x}\|_{\infty}$$

maximalt vara?

2a. (12p) Givet differentialekvationen

$$y''(t) + \cos y'(t) + \sin y(t) = 5, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Skriv ett Matlab/Octave-program som använder metoden Framåt Euler för att beräkna en approximation av $y(1)$ med ett absolutfel begränsat av 10^{-5} .

2b. (7p) Utöka programmet så att det också beräknar integralen

$$\int_0^1 y(t)^2 dt.$$

V.g. vänd

Uppgift 3 **eller** den alternativa uppgiften får göras, inte båda!

3a. (3p) Formulera metoden bakåt Euler för differentialekvationen

(*)
$$y'(t) = \sin y(t), \quad y(0) = y_0.$$

3b. (3p) Formulera en fixpunktsmetod för att finna z som löser ekvationen $z = y_n + h \sin z$. (Här kan vi tänka på y_n som bakåt Euler-lösningen i steg n och tidssteget h till differentialekvationen (*).)

3c. (5p) Skriv en Matlab/Octave-funktion som tar y_0 och steglängden h som argument, och som utdata ger Bakåt Euler-lösningen till (*) efter första steget, dvs. y_1 , beräknad med hjälp av fixpunktsiteration.

3d. (5p) Härled ett villkor för steglängden h så att fixpunktsmetoden i din Matlab/Octave-funktion säkert kommer att konvergera oavsett val av y_0 .

Alternativ uppgift 3. (16p) Formulera en differenskvot som approximerar derivatan av en reellvärd funktion av en variabel, och härled en feluppskattning.