Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Numeriska metoder BE3002/3
9.00-12.00 18/1 2014

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng.

Det finns två alternativa uppgifter 3.

1. (15p) Vi vill lösa ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Högerledsvektorn $\mathbf{b}$ approximeras av $\tilde{\mathbf{b}}$ med ett relativt fel

$$\|\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\|_\infty / \|\mathbf{b}\|_\infty \leq 0.1.$$

Om $A\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$, hur stort kan det relativa felet

$$\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty$$

maximalt vara?

Lösning:
$\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \kappa(A) \|\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\|_\infty / \|\mathbf{b}\|_\infty$, där $\kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 4 * 5/4 = 5$ är konditionstalet.

Svar: $5 * 0.1 = 0.5$.

2a. (12p) Givet differentialekvationen

$$y''(t) + \cos y'(t) + \sin y(t) = 5, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Skriv ett Matlab/Octave-program som använder metoden Framåt Euler för att beräkna en approximation av y(1) med ett absolutfel begränsat av 10^{-5} .

2b. (7p) Utöka programmet så att det också beräknar integralen

$$\int_0^1 y(t)^2 dt.$$

V.g. vänd

Lösning (2a):

Differentialekvationen skrivs först om som ett system av första ordningens differentialekvationer med $u_1 = y$, $u_2 = y'$:

$$u_1' = u_2,$$
$$u_2' = 5 - \cos u_2 - \sin u_2,$$

där $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 4$. Matlab-programmet:

```
h=0.1;          %Initial steglangd
yold=1; y=2; %Initialisering for att komma in i while-loopen

while abs(yold-y)>1e-5
    yold=y;
    u=[1; 4];
    for t=0:h:1-h
        u=u+h*[u(2); 5-cos(u(2))-sin(u(1))];
    end
    y=u(1);
    h=h/2;
end

disp(['y(1) ges ungefrligen av ', num2str(y)])
```

Lösning (2b):

Vi får det nya programmet genom att modifiera föregående program så att det också beräknar $u_3' = u_1^2$, $u_3(0) = 0$, så att $u_3(1)$ är värdet på integralen i uppgiften.

```
h=0.1;          %Initial steglangd
yold=1; y=2; %Initialisering for att komma in i while-loopen

while abs(yold-y)>1e-5
    yold=y;
    u=[1; 4; 0];
    for t=0:h:1-h
        u=u+h*[u(2); 5-cos(u(2))-sin(u(1)); u(1)^2];
    end
    y=u(1);
    h=h/2;
end

disp(['y(1) ges ungefrligen av ', num2str(y)])
disp(['Integralen ges ungefrligen av ', num2str(u(3))])
```

Uppgift 3 **eller** den alternativa uppgiften får göras, inte båda!

3a. (3p) Formulera metoden bakåt Euler för differentialekvationen

$$(*) \qquad y'(t) = \sin y(t), \quad y(0) = y_0.$$

3b. (3p) Formulera en fixpunktsmetod för att finna z som löser ekvationen $z = y_n + h \sin z$. (Här kan vi tänka på y_n som bakåt Euler-lösningen i steg n och tidssteget h till differentialekvationen $(*)$.)

3c. (5p) Skriv en Matlab/Octave-funktion som tar y_0 och steglängden h som argument, och som utdata ger Bakåt Euler-lösningen till $(*)$ efter första steget, dvs. y_1, beräknad med hjälp av fixpunktsiteration.

3d. (5p) Härled ett villkor för steglängden h så att fixpunktsmetoden i din Matlab/Octave-funktion säkert kommer att konvergera oavsett val av y_0.

Lösning (3a): $y_{n+1} = y_n + h \sin y_{n+1}$.

Lösning (3b): Index för fixpunktsiterationen kallas i:

$$z^{i+1} = y_n + h \sin z^i$$

Lösning (3c):

```
function y1 = uppgift3c(h,y0)
% Ett steg med Euler bakat, beraknad med fixpunktsiteration
z=y0;
zold=z+1;  %Initialisering for att sakert komma in i while-loopen
while abs(z-zold)>1e-5
    zold=z;
    z=y0+h*sin(z);
end
y1=z;
```

Lösning (3d): Fixpunktsiterationen $z^{i+1} = G(z^i)$ kommer att konvergera oavsett startpunkt om $|G'| < 1$ överallt. Med $G(z) = y_n + h \sin z$ är $G'(z) = h \cos z$. Alltså ger $h < 1$ säkert konvergens.

Alternativ uppgift 3. (16p) Formulera en differenskvot som approximerar derivatan av en reellvärd funktion av en variabel, och härled en feluppskattning.

Lösning alternativ uppgift 3: Se kursboken av Sauer.