Tentamen i grundkurs i numeriska metoder - del 2

Obs! Denna tenta är för studenter som går kurser SF1513, SF1514, SF1543 och **ej** för kurserna SF1544, SF1545 och BE3002.

Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns (inkl bonuspoäng): 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximal poäng 50 + bonuspoäng (max 4p). Miniräknare är ej tillåten på denna tentamen. Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag. Då algoritmbeskrivning begärs, avses om inte annat anges beskrivning i Matlab. Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade.

Uppgift 1 Givet är en differentialekvation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \sin\left(\frac{dy}{dt}\right) + \gamma = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

där γ är en parameter (oberoende av t).

(a) **[3p]** Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer på vektorform, dvs.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f(t, \mathbf{u}).$$

(b) **[6p]** Skriv ett MATLAB-program, som med Eulers metod ger en lösningskurva (t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), …, (t_n, y_n) där $t_0 = 0$ och $t_n = 1$. Steglängden h väljs till $h = 0.001$. Lösningskurvan $y(t)$ erhållen med Eulers metod ska plottas. För denna deluppgift kan du välja $\gamma = 1$.

(c) **[6p]** Vi vill hitta det värde för γ som $y(1) = 0$. Skriv ett MATLAB-program som med sekantmetoden bestämmer detta värde. Du får antingen lösa det med hjälp av Eulers metod som i (b) eller med `ode45`. En lösning ligger i närheten av $\gamma = 1$.

Var god vänd

Uppgift 2

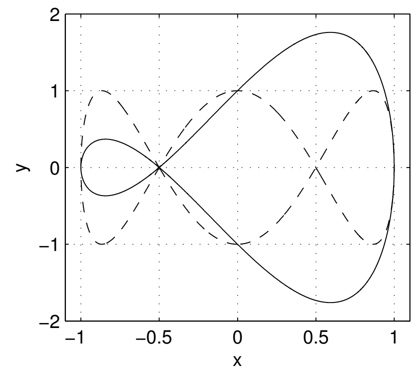
Följande två parametriserade kurvor är givna

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(t) \\ y(t) &= \sin(2t)+\cos(t) \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} x(s) &= \sin(s) \\ y(s) &= \cos(\alpha s). \end{aligned}$$

För $\alpha = 3$ är kurvorna plottade i figuren bredvid.



(a) **[3p]** Visa att när $\alpha = 3$ har kurvorna en skärningspunkt för $t = 2\pi$ och $s = 2\pi$. Ange x och y-koordinaten för punkten.

(b) **[4p]** Vi ska nu hitta en skärningspunkt när $\alpha = 3.01$. Formulera problemet som ett olinjärt ekvationssystem i två variabler.

(c) **[7p]** Formulera Newton's metod för detta olinjära ekvationssystem och skriv ett MATLAB-program som utför Newton's metod för detta olinjära ekvationssystem.

Uppgift 3 Vi vill beräkna derivatan av en funktion $f(x)$ med hjälp av finita differenser.

$$f'(x) \approx -\frac{11}{6h}f(x) + \frac{\alpha}{h}f(x+h) - \frac{3}{2h}f(x+2h) + \frac{1}{3h}f(x+3h)$$

(a) **[4p]** För ett visst val av α är noggrannhetsordningen 3. Vi tillämpar denna metod med $f(x) = e^x$. För $x = 0$ och $h = 0.1$ blir absolutfelet ungefär $4 \cdot 10^{-4}$. Hur stort blir felet ungefär när $h = 0.05$?

(b) **[8p]** Bestäm det α som leder till högst noggrannhetsordning.

Uppgift 4

Vi vill beräkna integralen

$$\int_0^2 (2 + e^{x^2})\,dx.$$

```
>> xv=0:0.1:2;
>> sum(exp(xv.^2))
ans =
   194.1387
>> exp(4)
ans =
    54.5982
```

(a) **[5p]** Beräkna en uppskattning till integralen med hjälp av utdata till höger och trapetsregeln.

(b) **[4p]** Felet med trapetsregeln i uppgift (a) blir ungefär 0.2. Hur stort blir felet om vi använder trapetsregeln med steglängd $h = 0.025$?