

TENTAMEN I GRUNDKURS I NUMERISKA METODER - DEL 2

Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns (inkl bonuspoäng): 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximal poäng 50 + bonuspoäng (max 4p). Miniräknare är ej tillåten på denna tentamen. Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag. Då algoritmbeskrivning begärs, avses om inte annat anges beskrivning i Matlab. Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade.

Uppgift 1 En kastrull vatten värms upp på en spisplatta så att vattnet kokar. Kastrullen ställs sedan bredvid plattan så att vattnet svalnar. Vattnets temperatur $T(t)$ mäts därefter vid vissa tidpunkter t .

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$T(t)$	100.00	99.32	98.89	97.71	97.32	96.66	95.76	95.18	94.23	93.57	93.20

a. (8p) Av tidigare erfarenhet vet man att vattnets temperatur avsvalnar enligt $T(t) \approx \alpha + \beta e^{-\gamma t}$ där α , β och γ är okända men kan uppskattas grovt till $\alpha \approx 28$, $\beta \approx 72$ och $\gamma \approx 0.05$. Skriv ett matlabprogram som beräknar den bästa anpassningen i minstakvadratmening.

Om du i något steg i formuleringen använder matlabkommandot “\” måste du även beskriva vad matlab beräknar i detta steg.

b. (7p) För att analysera värmeöverföringen i vattnet och kastrullen behöver man bestämma

$$E = \int_0^{\infty} (T(t) - \alpha) dt.$$

Beräkna E genom att använda mätdata i tidsintervallet $[0, 5]$ och den beräknade anpassningen i uppgiften i intervallet $[5, \infty)$. Du får använda dig av utdata från matlab angivet till höger. TT är en vektor som innehåller temperaturerna i tabellen, och α , β och γ är anpassningen från uppgift a. Du ska här göra handräkning och behöver inte skriva någon programkod.

```
>> alpha
alpha =
25.982
>> beta*exp(-gamma*5)/gamma
ans =
1154.6
>> sum(TT-alpha)
ans =
776.03
```

Var god vänd

Uppgift 2 a. (6p) Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{aligned}-u''(x) + u(x) &= f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 1,\end{aligned}$$

där $f(x) = \sin^2 x$. Härled en matris A och en vektor $\mathbf{b}$ så att det linjära ekvationssystemet $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ approximerar randvärdesproblemet. Använd konstant steglängd och finita differenser med n delintervall och noggrannhetsordning 2. Förklara innebörden av elementen i vektorn $\mathbf{v}$.

- b. (4p) För att lösa a-uppgiften använder vi steglängd $h = 0.1$ och uppskattar felet i punkten $x = 0.5$ till 10^{-2} . Ungefär hur stort blir felet i punkterna $x = 0$, $x = 0.5$ och $x = 1$ om vi väljer $h = 0.01$?
- c. (4p) Byt randvillkoret $u(1) = 1$ mot $u'(1) = 0$ och härled igen en matris A och en vektor $\mathbf{b}$ så att det linjära ekvationssystemet $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ approximerar randvärdesproblemet. Tips: Använd den finita differensapproximationen $g'(x) \approx (g(x) - g(x-h))/h$.

Uppgift 3 Betrakta differentialekvationen

$$y'(t) = -\alpha y(t)^2 - \frac{1}{2}y(t)$$

med $y(0) = 1$ där $\alpha \geq 0$ är en parameter.

a. (7p) Formulera Eulers metod (framåt Euler) för denna differentialekvation med $\alpha = 1$ i form av ett matlabprogram. Beräkna resultatet (för hand) efter ett steg med $h = 0.1$.

b. (4p) Visa att Eulers metod med konstant steglängd $h > 0$ är stabil när den tillämpas på denna differentialekvation om

$$h < \frac{1}{c_1\alpha + c_2}$$

och bestäm konstanter c_1 och c_2 . Du får här använda att när $\alpha \geq 0$ så är lösningen (monotont) avtagande och $y(t) > 0$.

c. (3p) Vi använder framåt Euler (med tillräckligt litet h) för $\alpha = 0$, $\alpha = 3$, $\alpha = 6$ och $\alpha = 9$ och får värden på $y(1)$ enligt figur till höger. Uppskatta α med linjär interpolation så att $y(1) = 0.5$. Redovisa beräkning och resonemang.

d. (7p) Skriv ett effektivt matlabprogram som beräknar α med hög noggrannhet så att $y(1) = 0.5$. Använd framåt Euler och kombinera med en eller flera numeriska metoder vi gått igenom i kursen. Använd startgissning (eller startgissningar) från resultatet från uppgift c.

