Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 30 oktober, 2014

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Funktionerna f och g ges av

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{och} \quad g(x, y) = xy$$

för alla reella x och y.

(a) Skissera nivåkurvorna till funktionerna f och g. **(2 p)**

(b) Visa att nivåkurvorna till f och g alltid skär varandra under rät vinkel utom i origo. **(2 p)**

2. Funktionen f ges av

$$f(x, y, z) = \sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x).$$

för (x, y, z) i $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm Taylorpolynomet av första ordningen för f i närheten av punkten $(0, \pi/2, \pi/3)$. **(2 p)**

(b) Bestäm alla stationära punkter till f i området där $0 \leq x, y, z < \pi$. **(2 p)**

3. För att beräkna arbetet som ett vektorfält $\mathbf{F}$ utför används kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(a) Beräkna kurvintegralen då $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ och γ ges av $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, där t går från -2 till 2. **(2 p)**

(b) Ge ett exempel på ett vektorfält $\mathbf{F}$ sådanat att kursvintegralens värde blir 2 när kurvan γ ges av enhetcirkeln som genomlöps ett varv moturs. **(2 p)**

DEL B

4. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ i det kompakta området som ges av olikheten $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. **(4 p)**

5. Beräkna integralen
$$\iint_D x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$$
där D är området som ges av olikheterna $x \geq 0$ och $x^2 + y^2 \leq 1$. **(4 p)**

6. En kulle beskrivs av ytan
$$z = \frac{1}{1 + 3x^2 + 4y^2}$$
i ett ortonormalt koordinatsystem där z-axeln pekar verktikalt uppåt.
   (a) Bestäm kullens brantaste lutning i punkten som svarar mot $(x, y) = (a, b)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm var kullen är som brantast. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Vektorfältet $\mathbf{F}$ verkar på en partikel så att den färdas i en spiralformad bana kring origo i xy-planet med
$$\mathbf{r}(t) = (Ae^{-kt}\cos\omega t, Ae^{-kt}\sin\omega t)$$
under tiden t där $0 \le t \le 5$ och t mäts i sekunder, $k = 2\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega = 3$ radianer/s och $A = 3$ m. Enligt Newtons andra lag ges kraften på partikeln av $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{r}''(t)$, där m är partikelns massa. Kraftfältet kan då skrivas som
$$\mathbf{F}(x,y) = m((k^2-\omega^2)x + 2k\omega y, (k^2-\omega^2)y - 2k\omega x)$$
för (x,y) i $\mathbb{R}^2$.
   (a) Beräkna partikelns hastighet $\mathbf{r}'(t)$. **(1 p)**
   (b) Avgör om kraftfältet är konservativt. **(1 p)**
   (c) Beräkna arbetet som utförs av kraftfältet under partikelns rörelse. **(2 p)**

8. Låt $\mathbf{F}(x,y,z)$ vara ett vektorfält som är definierat i hela $\mathbb{R}^3$ och vars komponenter är kontinuerligt deriverbara till andra ordningen. Vi vill visa att flödet som ges av
$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$
där S är en godtycklig sfär i $\mathbb{R}^3$ och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade normalvektorn till denna sfär alltid är noll.
   (a) Visa detta genom att använda Stoke's sats. **(2 p)**
   (b) Visa samma sak genom att använda divergenssatsen. **(2 p)**

9. Arean av triangeln som ges av punkterna på enhetscirkeln med hörn i punkterna som i polära koordinater ges av $[1,\alpha]$, $[1,\beta]$ och $[1,\gamma]$ ges av
$$A = \frac{1}{2}(|\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| + |\sin(\gamma-\alpha)|).$$
Bestäm den genomsnittliga arean av alla trianglar som har sina hörn på enhetscirkeln. **(4 p)**