Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Fredagen den 26 september, 2014

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Betrakta följande tre områden i planet:

$$D_1 = \{(x, y)\colon |x^2 - y^2| < 4\},\ D_2 = \{(x, y)\colon |x + y| \geq 2\},\ D_3 = \{(x, y)\colon |4x^2 + 3y^2| \leq 7\}.$$

   (a) Avgör vilket eller vilka av områdena som är *öppna*. **(1 p)**

   (b) Avgör vilket eller vilka av områdena som är *slutna*. **(1 p)**

   (c) Ge ett exempel på en funktion som är kontinuerlig på något av de tre områdena men som varken har ett största eller ett minsta värde i området. **(1 p)**

   (d) Är det något av områdena som är sådant att varje funktion som är kontinuerlig i området måste ha ett största och ett minsta värde i området? **(1 p)**

2. Den vektorvärda funktionen $\mathbf{f}$ definieras genom

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x - y, (y - z)^2, (z - x)^2).$$

   (a) Beräkna funktionalmatrisen $\mathbf{f}'$. **(2 p)**

   (b) Beräkna funktionaldeterminanten $\frac{d(\mathbf{f})}{d(x,y,z)}$. **(1 p)**

   (c) Vilken slutsats kan man dra från beräkningen i (b) när det gäller att använda $\mathbf{f}$ vid substitution i trippelintegraler? **(1 p)**

3. Betrakta området D som ges av kvadraten med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ och $(1, -1)$. För att beräkna integralen $I = \iint_D \sqrt{x^2 - y^2}\, dxdy$ är det lämpligt att göra ett variabelbyte så att $u = x + y$ och $v = x - y$. Utför detta variabelbyte och beräkna därigenom integralens värde. **(4 p)**

DEL B

4. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x, y) = 3xy$ i det kompakta området som ges av olikheten $x^2 + xy + y^2 \leq 1$. **(4 p)**

5. Beräkna integralen
$$\iint_D \sqrt{1 + x^3}\, dxdy$$
där D är området som ges av olikheterna $0 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq x^2$. **(4 p)**

6. Betrakta grafytan $z = f(x, y)$ till funktionen $f(x, y) = \sqrt{2 - 2x^2 - y^2}$.
   (a) Vilket blir funktionens naturliga definitionsområde? **(1 p)**
   (b) Bestäm ett uttryck för den normaliserade normalvektorn $\mathbf{N}$ längs grafen om vi antar att $\mathbf{N}$ har en positiv z-komponent. **(3 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Avgör om den generaliserade integralen
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy$$
är konvergent eller divergent. **(4 p)**

8. Betrakta kurvintegralen
$$\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
där γ är den positivt orienterade slutna kurva som innesluter det område som i polära koordinater beskrivs av olikheterna $1 \leq r \leq 2$ och $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
   (a) Beräkna kurvintegralens värde genom parametrisering av kurvan γ. **(2 p)**
   (b) Beräkna kurvintegralens värde genom användning av Greens formel. **(2 p)**

9. Undersök vilka värden $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ kan anta när α, β och γ är vinklarna i en triangel. **(4 p)**