Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2014-09-26

DEL A

1. Betrakta följande tre områden i planet:

$$D_1 = \{(x,y)\colon |x^2 - y^2| < 4\},\ D_2 = \{(x,y)\colon |x+y| \geq 2\},\ D_3 = \{(x,y)\colon |4x^2+3y^2| \leq 7\}.$$

(a) Avgör vilket eller vilka av områdena som är *öppna*. **(1 p)**
(b) Avgör vilket eller vilka av områdena som är *slutna*. **(1 p)**
(c) Ge ett exempel på en funktion som är kontinuerlig på något av de tre områdena men som varken har ett största eller ett minsta värde i området. **(1 p)**
(d) Är det något av områdena som är sådant att varje funktion som är kontinuerlig i området måste ha ett största och ett minsta värde i området? **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Det första området är öppet, eftersom randpunkterna till området är kurvorna $x^2 - y^2 = 4$ och $x^2 - y^2 = -4$ och inga punkter på dessa kurvor tillhör området på grund av den strikta olikheten. Båda de andra områdena innehåller randpunkter, tex är $(1,1)$ en randpunkt i både D_2 och D_3.
(b) D_1 är inte slutet eftersom inga av randpunkterna tillhör området. Både D_2 och D_3 är slutna eftersom de innehåller sina randpunkter, som är linjerna $x+y=2$ och $x+y=-2$ för D_2 och ellipsen $4x^2+3y^2=7$ för D_3.
(c) Eftersom D_1 är öppet och obegränsat kan vi hitta en funktion som är kontinuerlig på D_1 men som går mot $\pm\infty$ när vi närmar oss randen. En sådan funktion är $f(x,y) = x$ som går mot $\pm\infty$ på linjen $(x,y) = (t,-t)$ som ligger helt i D_1. Området D_2 är obegränsat och därmed kan vi hitta kontinuerliga funktioner som är obegränsade på D_2, exempelvis funktionen $f(x,y) = x$.
(d) Området D_3 är slutet och begränsat och därmed finns enligt sats i boken alltid ett största och ett minsta värde för en funktion som är kontinuerlig på området.

Svar.

(a) D_1 är öppet, men inte D_2 och D_3.

(b) D_2 och D_3 är slutna, men inte D_1.

(c) $f(x, y) = x$ är kontinuerlig på D_1 men saknar största och minsta värde.

(d) D_3 har egenskapen att varje kontinuerlig funktion på D_3 måste ha ett största och ett minsta värde i D_3.

2. Den vektorvärda funktionen $\mathbf{f}$ definieras genom

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x - y, (y - z)^2, (z - x)^2).$$

(a) Beräkna funktionalmatrisen $\mathbf{f}'$. **(2 p)**

(b) Beräkna funktionaldeterminanten $\frac{d(\mathbf{f})}{d(x,y,z)}$. **(1 p)**

(c) Vilken slutsats kan man dra från beräkningen i (b) när det gäller att använda $\mathbf{f}$ vid substitution i trippelintegraler? **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a)

$$\mathbf{f}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2y - 2z & -2y + 2z \\ 2x - 2z & 0 & -2x + 2z \end{pmatrix}$$

(b) Vi kan beräkna determinanten av $\mathbf{f}'$ exempelvis genom att genomföra radoperationer. Vi får

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2y - 2z & -2y + 2z \\ 2x - 2z & 0 & -2x + 2z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2y - 2z & -2y + 2z \\ 0 & 2x - 2z & -2x + 2z \end{pmatrix}$$

$$= (2y - 2z)(2x - 2z) \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (2y - 2z)(2x - 2z) \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

där vi i första steget lagt $2z - 2x$ gånger den första raden till den tredje och i det sista steget dragit den andra från den tredje. Determinanten är noll i och med att den reducerade matrisen har en nollrad. Därmed är funktionaldeterminanten noll.

(c) Eftersom funktionaldeterminanten, eller Jacobideterminanten, är noll kan funktionen inte användas för substitution i trippelintegraler. Den avbildar områden alla områden i rummet på områden med volym noll.

Svar.

(a) $\mathbf{f}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x - 2z \\ -1 & 2y - 2z & 0 \\ 0 & -2y + 2z & -2x + 2z \end{pmatrix}$

(b) $\frac{d(\mathbf{f})}{d(x,y,z)} = 0$

(c) Vi kan inte använda $\mathbf{f}$ till variabelbyte i trippelintegraler eftersom funktionaldeterminanten är noll.

3. Betrakta området D som ges av kvadraten med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ och $(1,-1)$. För att beräkna integralen $I = \iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$ är det lämpligt att göra ett variabelbyte så att $u = x+y$ och $v = x-y$. Utför detta variabelbyte och beräkna därigenom integralens värde. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi kan först beräkna Jacobideterminanten. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 1\cdot 1 = -2.$$

Därmer har vi att

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \left(\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right)^{-1} = -\frac{1}{2}.$$

Vi behöver finna integrationsgränserna i de nya variablerna. Linjerna som begränsar kvadraten är $y=x$, $y=-x$, $y=2-x$, $y=x-2$. I de nya variablerna blir det $v=0$, $u=0$, $u=2$ och $v=2$. Alltså kan vi beräkna vår integral som

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy &= \int_0^2\int_0^2 \sqrt{uv}\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^2 \sqrt{uv}\,dudv = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 \sqrt{u}\,du\right)\left(\int_0^2 \sqrt{v}\,dv\right).\end{aligned}$$

Vi beräknar de båda enkelitegralerna som

$$\int_0^2 \sqrt{t}\,dt = \int_0^2 t^{1/2}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2}{3}2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\cdot 0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

och vi får

$$I = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

Svar. Integralens värde är $16/9$.

DEL B

4. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x,y) = 3xy$ i det kompakta området som ges av olikheten $x^2 + xy + y^2 \leq 1$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Eftersom området är slutet och begränsat finns säkert ett största och ett minsta värde för den kontinuerliga funktionen $f(x,y) = 3xy$. Eftersom randen är en sluten $\mathcal{C}^1$-kurva ska vi undersöka inre stationära punkter och sedan randpunkter med hjälp av Lagranges metod.

Gradienten för $f(x,y)$ ges av $\operatorname{grad} f(x,y) = (3y, 3x)$ och det finns bara en stationär punkt som ges av $x = y = 0$. Denna punkt ligger i det inre av området och värdet för funktionen är $f(0,0) = 0$.

Lagranges metod går ut på att se när gradienten till funktionen är parallell med gradienten till bivillkoret. Vi skriver bivillkoret som $g(x,y) = 0$ där $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ och får gradienten $\operatorname{grad} g(x,y) = (2x+y, x+2y)$. Vi kan se när gradienterna är parallella genom att beräkna determinanten

$$\det \begin{bmatrix} 3y & 2x+y \\ 3x & x+2y \end{bmatrix} = 3y(x+2y) - 3x(2x+y) = 6(y^2 - x^2) = 6(y-x)(y+x).$$

Därmed är gradienterna parallella precis när $y = \pm x$. Om $x = y$ ger bivillkoret att $x^2 + x^2 + x^2 = 1$, dvs $x = \pm 1/\sqrt{3}$ och $f(x,x) = 3x^2 = 1$. Om $x = -y$ ger bivillkoret $x^2 - x^2 + x^2 = 1$, dvs $x = \pm 1$ och $f(x,-x) = -3x^2 = -3$.

Slutligen jämför vi de tre kandidaterna till största och minsta värden för funktionen och finner att -3 är det minsta värdet och antas i punkterna $(1,-1)$ och $(-1,1)$. Det största värdet är 1 och antas i punkterna $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ och $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

Svar. Största värdet är $f(1,-1) = f(-1,1) = -3$ och minsta värdet är $f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = f(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = 1$.

5. Beräkna integralen

$$\iint_D \sqrt{1+x^3}\,dxdy$$

där D är området som ges av olikheterna $0 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq x^2$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi kan beräkna integralen genom upprepad integration och vi behöver välja vilken variabel vi ska integrera med avseende på först. Vi ställer upp båda möjligheterna

$$\iint_D \sqrt{1+x^3}\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3}\,dy \right) dx = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \right) dy$$

Den andra versionen är svår i och med att vi inte känner någon primitiv funktion till $\sqrt{1+x^3}$. Däremot kan vi beräkna integralen genom den första versionen som

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3}\,dy \right) dx &= \int_0^2 \left(\left[y\sqrt{1+x^3} \right]_0^{x^2} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(x^2\sqrt{1+x^3} - 0 \right) dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(1+x^3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{9} \cdot \left((1+8)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{9} \cdot (27-1) = \frac{52}{9}\end{aligned}$$

Svar. $\iint_D \sqrt{1+x^3}\,dxdy = \frac{52}{9}$.

6. Betrakta grafytan $z = f(x, y)$ till funktionen $f(x, y) = \sqrt{2 - 2x^2 - y^2}$.
   (a) Vilket blir funktionens naturliga definitionsområde? **(1 p)**
   (b) Bestäm ett uttryck för den normaliserade normalvektorn $\mathbf{N}$ längs grafen om vi antar att $\mathbf{N}$ har en positiv z-komponent. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Kvadratroten är definierad för icke-negativa tal och därför ges det naturliga definitionsområdet av $2-2x^2-y^2 \geq 0$, dvs $2x^2+y^2 \leq 2$. Detta är en ellips med halvaxlarna 1 och $\sqrt{2}$.

(b) Vi kan bilda funktionen $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ och funktionsgrafen är då lösningen till $g(x, y, z) = 0$ och dess normalvektor ges av gradienten till $g(x, y, z)$. Vi beräknar gradienten som

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = \left(4x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-2x^2-y^2}}, 2y \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-2x^2-y^2}}, 1\right).$$

För att kunna normalisera denna behöver vi beräkna beloppet som ges av kvadratroten ur denna vektor skalärmultiplicerad med sig själv, dvs av

$$\frac{(2x)^2 + y^2}{2 - 2x^2 - y^2} + 1 = \frac{2x^2 + 2}{2 - 2x^2 - y^2}.$$

När vi delar normalvektorn med sin längd får vi den normaliserade normalvektorn

$$\mathbf{N} = \left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2}}, \frac{y}{\sqrt{2x^2+2}}, \frac{\sqrt{2-2x^2-y^2}}{\sqrt{2x^2+2}}\right).$$

Svar.

(a) Funktionens definitionsområde ges av ellipsskivan $2x^2 + y^2 \leq 2$.

(b) Den normaliserade normalvektorn är $\mathbf{N} = \left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2}}, \frac{y}{\sqrt{2x^2+2}}, \frac{\sqrt{2-2x^2-y^2}}{\sqrt{2x^2+2}}\right)$ om z-komponenten ska vara positiv.

DEL C

7. Avgör om den generaliserade integralen
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy$$
är konvergent eller divergent. **(4 p)**

Lösningsförslag. Integranden är positiv i hela $\mathbb{R}^2$ och vi kan jämföra den med andra integrander som är större för att avgöra konvergens. Vi har två orsaker som kan orsaka divergens, dels att området är obegränsat, dels att integranden är obegränsad nära origo.

Vi har att
$$\frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{3/2}} \le \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$
och vi kan integrera över ett område D_R mellan cirklarna med centrum i origo och radier 1 och R, där $1 < R$. Vi får
$$\iint_{D_R} \frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy \le \iint_{D_R} \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy$$
Integralen till höger kan vi beräkna genom att införa polära koordinater och vi får
$$\begin{aligned}\iint_{D_R} \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_1^R \frac{1}{r^3}\,r\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1\,d\theta \int_1^R \frac{1}{r^2}\,dr = 2\pi\left[-\frac{1}{r}\right]_1^R = 2\pi\left(1-\frac{1}{R}\right) \le 2\pi\end{aligned}$$
oberoende av R. Därmed är integralen konvergent över området $x^2+y^2 \ge 1$ i $\mathbb{R}^2$.

Vi ser sedan på området som ges av enhetscirkeln. Där har vi
$$\frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{3/2}} \le \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$
och vi får
$$\begin{aligned}\iint_C \frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy &\le \iint_C \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^2\cos^2\theta}{r^3}\,r\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^1 1\,dr = \pi\cdot[r]_0^1 = \pi\end{aligned}$$
där vi använt oss av att
$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta+\sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}1\,d\theta = \frac{1}{2}[\theta]_0^{2\pi} = \pi.$$
Sammantaget får vi att integralen är konvergent och dess värde är mindre än 3π.

Svar. Integralen är konvergent.

8. Betrakta kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

där γ är den positivt orienterade slutna kurva som innesluter det område som i polära koordinater beskrivs av olikheterna $1 \le r \le 2$ och $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

(a) Beräkna kurvintegralens värde genom parametrisering av kurvan γ. **(2 p)**

(b) Beräkna kurvintegralens värde genom användning av Greens formel. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi delar upp kurvan i fyra delar, två cirkelbågar γ_1 γ_3 med radie 1 respektive 2 och två linjestycken γ_2 och γ_4 parallella med x-axeln respektive y-axeln.
Vi får γ_1 som $(x,y) = (\sin t, \cos t)$, $0 \le t \le \pi/2$ och

$$\int_{\gamma_1} \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\pi/2} \cos t(\cos t)\,dt - \sin t(-\sin t)\,dt = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Vidare ges γ_3 av $(x,y) = (2\cos t, 2\sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$ och

$$\int_{\gamma_3} \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin t(-2\sin t)\,dt - 2\cos t(2\cos t)\,dt}{2} = \int_0^{\pi/2} -2\,dt = -\pi.$$

För γ_2 har vi $(x,y) = (t,0)$, $1 \le t \le 2$ och

$$\int_{\gamma_2} \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\pi/2} 0\,dt - t\cdot 0\,dt = 0.$$

och γ_4 ger $(x,y) = (0, 2-t)$, $0 \le t \le 1$ vilket ger

$$\int_{\gamma_4} \frac{(y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\pi/2} (2-t)\cdot 0\,dt - 0\cdot(-1)\,dt = 0.$$

Sammantaget får vi

$$\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\pi}{2} + 0 - \pi + 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

(b) Greens formel säger att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy$$

I vårt fall har vi $P = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ och $Q = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ vilket ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2x\right) \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - y \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2y)\right) \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2+y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Därmed kan vi beräkna kurvintergralen som

$$-\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = -\int_0^{\pi/2} \int_1^2 \frac{1}{r} \cdot r\, dr d\theta = -\frac{\pi}{2} \cdot \int_1^2 1\, dr = -\frac{\pi}{2}(2-1) = -\frac{\pi}{2},$$

vilket stämmer med beräkningen ovan.

Svar. Kurvintegralens värde är

$$\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\pi}{2}$$

för båda sätten att beräkna den.

9. Undersök vilka värden $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ kan anta när α, β och γ är vinklarna i en triangel. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi betraktar funktionen $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z$ med bivillkoren $x + y + z = \pi$ och $x, y, z > 0$. Bivillkoren ger ett område som är begränsat, men inte slutet. Det är klart att $0 \leq f(x,y,z) \leq 3$ eftersom $0 < \sin x \leq 1$ om $0 < x < \pi$, så funktionen har en övre och en undre begränsning.

Vi söker först stationära punkter i det inre under bivillkoret $g(x,y,z) = x+y+z-\pi$. Vi har att $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (\cos x, \cos y, \cos z)$ och denna är parallell med $\operatorname{grad} g(x,y,z) = (1,1,1)$ bara om $\cos x = \cos y = \cos z$, vilket ger $x = y = z = \pi/3$ på grund av bivillkoret. I denna punkt har vi $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sedan betraktar vi randen till området i planet $x + y + z = \pi$. Denna ges av $x = 0$, $y = 0$, respektive $z = 0$. Av symmetri räcker det att betrakta en av dessa, säg $z = 0$. Där har vi $f(x,y,0) = f(x, \pi - x, 0) = \sin x + \sin(\pi - x) + \sin 0 = 2\sin x$. Eftersom $0 \leq x \leq \pi$ antar $2\sin x$ alla värden mellan 0 och 2 på randen.

När vi jämför med värdet i den stationära punkten i det inre får vi $2 < 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ eftersom $4 < \frac{27}{4}$. Alltså är det största värdet funktionen antar $3\sqrt{3}/2$.

Det återstår att se att funktionen kan anta alla värden i intervallet $0 < t \leq 3\sqrt{3}/2$. Det räcker att visa att det går att komma godtyckligt nära 0. Vi ser på $f(t, t, \pi - 2t) = 2\sin t + \sin(2t) = 2\sin t(1 + \cos t) \leq 4\sin t$ som kan bli godtyckligt nära noll för $t > 0$.

Svar. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ kan anta alla värden i det halvöppna intervallet $\big(0, 3\sqrt{3}/2\big]$.