KTH Teknikvetenskap

SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 7 januari 2015 kl 14.00 – 19.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som var och en ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4 – 6 utgör del II. De tre sista uppgifterna utgör del III. För betygen A och B krävs ett visst antal poäng på del III.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

Dessa poänggränser är preliminära och kan komma att justeras.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Del I

(1) De naturliga talen n och m ges i bas 5 av att $n = (12)_5$ och $m = (34)_5$. Beräkna produkten nm. Svaret skall ges i bas 5.

(2) Bestäm alla reella tal x som uppfyller olikheten $|2x - 4| < x$.

(3) Låt som vanligt $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, de naturliga talen, och definiera sedan $\mathbb{T} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ är jämnt delbart med } 3\}$.

- Går det att finna funktioner $g : \mathbb{N} \to \mathbb{T}$ och $h : \mathbb{T} \to \mathbb{N}$ som är varandras inverser? Ge exempel på sådana funktioner eller förklara varför det inte är möjligt.
- Har de bägge mängderna $\mathbb{N}$ och $\mathbb{T}$ samma kardinalitet? (Två mängder med samma kardinalitet kallas i kurslitteraturen för *equivalent sets*, man säger också att de har samma kardinaltal (*cardinal number*.)

Del II

(4) a) Är det sant att $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ för godtyckliga mängder A och B? (2 p)

b) Är det sant att $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = \emptyset$ för godtyckliga mängder A och B? (2 p)

Bevisa dina påståenden!

(5) Bestäm koefficienten framför x^{23} termen i utvecklingen av uttrycket $(x + 2)^{25}$.

(6) Låt $z = -1 + i\sqrt{3}$ och $w = 4 + 4i$

a) Skriv z och w på polär form. (2 p)

b) Beräkna $\dfrac{z^8}{w^3}$. Svaret kan ges på polär form. (2 p)

Var god vänd!

Del III

(7) a) Funktionen $f(x) = x^{3/2}$, $x > 0$, har derivatan $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

Bestäm ett närmevärde till $\left(\dfrac{39}{10}\right)^{3/2}$ med hjälp av linjär approximation.

(2 p)

b) Förklara också idén bakom linjär approximation: Ange den generella formeln och förklara varför och under vilka omständigheter den kan förväntas ge en god approximation.

(2 p)

(8) Bestäm alla reella lösningar till ekvationenerna

a) $\log_x 2^x = x$ (2 p) b) $\left|\sin^2 x - \cos^2 x\right| = \dfrac{1}{2}$ (2 p)

(9) Bevisa med hjälp av induktion att $3^n > n^3 + 3n$ för alla naturliga tal $n \geq 4$.
