TENTAMEN 7/1 · 2015
SF1661 Perspektiv på Matematik
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

(1.) $n = (12)_5$ , $m = (34)_5$

Vi bildar additions- och multiplikationstabeller för bas 5

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 4 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 4 | 10 | 11 | 12 | 13 |

| · | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 11 | 13 |
| 3 | 3 | 11 | 14 | 22 |
| 4 | 4 | 13 | 22 | 31 |

Med hjälp av dessa kan vi beräkna produkten med standarduppställningen för multiplikation

$$\begin{array}{r} 34 \\ \cdot\ 12 \\ \hline 123 \\ 34\phantom{0} \\ \hline 1013 \end{array}$$

SVAR: $(1013)_5$

(2) Vi söker de $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller

$$|2x-4| < x \quad (*)$$

- Om $2x-4 \geq 0$, dvs om $x \geq 2$ är

$(*) \iff 2x-4 < x \iff$
$x < 4$

Så om $x \geq 2$ löses $(*)$ av $x < 4$,
vi får lösningsmängden
$L_1 = [2, 4)$ på intervallet $x \geq 2$

- Om $2x-4 < 0$, dvs om $x < 2$, är

$(*) \iff -(2x-4) < x \iff$
$-2x+4 < x \iff 3x > 4$
$\iff x > 4/3$

Så om $x < 2$ löses $(*)$ av $x > 4/3$,
vi får lösningsmängden
$L_2 = (4/3, 2)$ på intervallet $x < 2$.

- Samtliga lösningar till $(*)$ fås som

$$L = L_2 \cup L_1 = (4/3, 2) \cup [2, 4)$$
$$= (4/3, 4)$$

Svar: $4/3 < x < 4$

(3) Låt $g: \mathbb{N} \to \overline{\text{T}}$ ges av

$$g(n) = 3n$$

och låt $h: \text{'T'} \to \mathbb{N}$ ges av

$$h(t) = \frac{t}{3}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ & & & & & & & & g \downarrow \uparrow h \\ \text{'T'}: & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & & t = 3n \end{array}$$

$$g(h(t)) = g\left(\frac{t}{3}\right) = 3 \cdot \frac{t}{3} = t, \ \forall t \in \overline{\text{T}}$$

$$h(g(n)) = h(3n) = \frac{3n}{3} = n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Vilket visar att $g$ och $h$ är varandras inverser.

Eftersom det existerar en bijektion $g: \mathbb{N} \to \text{'T'}$ (enligt ovan) följer att $\mathbb{N}$ och $\overline{\text{'T'}}$ har samma kardinalitet.

(4) a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ gäller för godtyckliga mängder (detta är en av "de Morgans lagar")

Bevis: $x \in (A \cap B)^c \iff x \notin A \cap B$

$\iff x \notin A$ eller $x \notin B \iff$

$x \in A^c$ eller $x \in B^c \iff x \in A^c \cup B^c$

b) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \neq \emptyset$ för godtyckliga mängder A och B.

Tag till exempel
$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ i universet (grundmängden)
$U = \{1, 2, 3, 4\}$

Då är
$A \cup B = \{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1, 2, 3\}$

$A^c \cup B^c = \{3, 4\} \cup \{1, 4\} = \{1, 3, 4\}$

och

$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\} \neq \emptyset$

Svar: a) JA, b) NEJ

(5) $(x+2)^{25} = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} x^{25-k} \cdot 2^k$

(Binomialsatsen)

$k=2$ ger den term som innehåller $x^{23}$ och den sökta koefficienten är alltså

$$\binom{25}{2} \cdot 2^2 =$$

$$= \frac{25!}{23!\,2!} \cdot 2^2 = \frac{25 \cdot 24}{2} \cdot 2^2$$

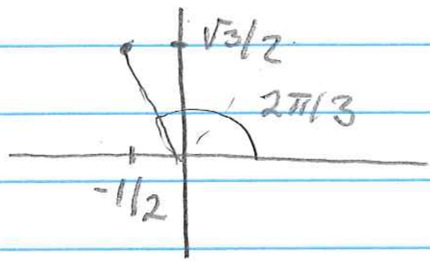
$$= 50 \cdot 24 = 1200$$

SVAR: 1200

⑥

a) $\underline{\underline{Z}} = -1 + i\sqrt{3} = \left\{ |z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \right\}$

$= 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$




$= \underline{\underline{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}}$

$\underline{\underline{W}} = 4 + 4i = \left\{ |w| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \right\}$

$= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= \underline{\underline{4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}}$

b) $\underline{\underline{\frac{z^8}{w^3}}} = \frac{2^8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^8}{(4\sqrt{2})^3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^3}$

$= \frac{2^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right)}{2^6\cdot 2\sqrt{2}\left(\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\left(\cos\frac{16\pi}{3} + i\sin\frac{16\pi}{3}\right)}{\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} =$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\cos 4\pi/3 + i\sin 4\pi/3}{\cos 3\pi/4 + i\sin 3\pi/4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= \underline{\underline{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}}$

6 forts.

Svar:

a) $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$w = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\frac{z^8}{w^3} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

(7) $f(x) = x^{3/2}$ $\quad f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

a) Vi använder formeln

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

för linjär approximation, som kan antas ge goda approximativa värden på $f(x_0+\Delta x)$ om $|\Delta x|$ är litet!

Eftersom vi kan beräkna $f(x)$ och $f'(x)$ exakt för $x=4$, och eftersom $\frac{39}{10} = 4 - \frac{1}{10}$, tar vi $x_0 = 4$ och $\Delta x = -\frac{1}{10}$.

Alltså får vi

$$\left(\frac{39}{10}\right)^{3/2} = f\left(\frac{39}{10}\right) = f\left(4 - \frac{1}{10}\right)$$

$$\approx f(4) + f'(4)\left(-\frac{1}{10}\right) =$$

$$= 4^{3/2} + \frac{3}{2}\sqrt{4}\left(-\frac{1}{10}\right) = 8 + \frac{3}{2}\cdot 2\left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$= 8 - \frac{3}{10} = \underline{\underline{\frac{77}{10}}} = 7.7$$

7 a) Svar: $\left(\frac{39}{10}\right)^{3/2} \approx 7.7$

(7b) Se föreläsningsanteckningar samt "Workshop om derivata och integral".

---

(8)

a) $\log_x 2^x = x$

Eftersom $\log_a t$ är def. endast för $a > 0$, $a \neq 1$ (samt $t > 0$) är V.L. i ekvationen endast def. för $x > 0$, $x \neq 1$.

Då gäller

$$\log_x 2^x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{\log_x 2^x} = x^x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^x = x^x$$

$x = 2$ är uppenbarligen en lösning.

Detta är också den enda lösningen ty om

$x < 2$ är $2^x > x^x$ och om

$x > 2$ är $2^x < x^x$.

(8a) Svar: $x = 2$

8

b) $|\sin^2 x - \cos^2 x| = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |\cos^2 x - \sin^2 x| = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |\cos 2x| = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$

eller $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

• $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \begin{cases} \pi/3 + n \cdot 2\pi \\ -\pi/3 + n \cdot 2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \pi/6 + n \cdot \pi \\ -\pi/6 + n \cdot \pi \end{cases}$

• $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \begin{cases} 2\pi/3 + n \cdot 2\pi \\ -2\pi/3 + n \cdot 2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \pi/3 + n \cdot \pi \\ -\pi/3 + n \cdot \pi \end{cases}$

Svar: $x = \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$,

$x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$

$n \in \mathbb{Z}$.

(9) Låt $P_n$ vara påståendet
$$3^n > n^3 + 3n.$$

Vi visar med induktion över $n$ att $P_n$ är sant för $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Induktionsbas: För $n=4$ gäller att

$$V.L. = 3^4 = 81 \quad , \quad H.L. = 4^3 + 3 \cdot 4 = 64 + 12 = 76$$
så $P_4$ är sant.

Antag nu att $P_k$ är sant för något $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$, dvs anta $3^k > k^3 + 3k$

Induktionssteg: Då gäller för $n = k+1$ att

$$V.L. = 3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \underset{\text{induktions antagandet}}{\overset{\text{Enl.}}{>}} 3(k^3 + 3k)$$

Det räcker nu att visa att
$$3(k^3 + 3k) \geq H.L.(n=k+1) = (k+1)^3 + 3(k+1)$$

Vi har att
$$3(k^3 + 3k) - (k+1)^3 - 3(k+1) =$$
$$= 3k^3 + 9k - k^3 - 3k^2 - 3k - 1 - 3k - 3 =$$
$$= 2k^3 - 3k^2 + 3k - 4 \underset{\text{om } k \geq 4}{\geq} 8k^2 - 3k^2 + 3 \cdot 4 - 4 > 0$$

Alltså är $3(k^3 + 3k) \geq (k+1)^3 + 3(k+1)$

9 forts.

Vi har alltså sammanfattningsvis att

$$3^{k+1} \underset{\text{enl. ind. ant.}}{>} 3(k^3+3k) \underset{(k\geq 4)}{\geq} (k+1)^3 + 3(k+1)$$

Alltså har vi visat $P_{k+1}$ är sant under antagandet att $P_k$ är sant.

Då även $P_4$ är sant följer enligt induktionsprincipen att $P_n$ är sant för alla heltal $n \geq 4$.