Lösningsförslag till Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 1) 7 januari 2015 kl 8:00 - 13:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

(1) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y(t)y'(t) + (1 + y(t)^2)t = 0, \quad y(0) = -1.$$

Lösning: Vi har att göra med en separabel ekvation. Vi kan skriva ekvationen på formen

$$\frac{y}{1+y^2}dy = -tdt$$

vilket efter integrering ger

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = -t^2/2 + C$$

där C är en konstant. Detta kan skrivas

$$\ln(1+y^2) = -t^2 + 2C,$$

vilket ger

$$1 + y^2 = e^{-t^2+2C} = e^{2C}e^{-t^2}.$$

Låter vi $A = e^{2C}$ (vi tänker på att A därför måste vara postiv) får vi

$$y^2 = Ae^{-t^2} - 1$$

vilket medför att

$$y = \pm\sqrt{Ae^{-t^2} - 1}.$$

Vi ska nu välja tecknet, samt värdet på A så att vi får den lösning som uppfyller b.v. $y(0) = -1$. Eftersom $y(0)$ är negtiv väljer vi $''-''$, dvs

$$y = -\sqrt{Ae^{-t^2} - 1}.$$

Då är $y(0) = -\sqrt{A-1}$, så vi måste ha $A = 2$ för att $y(0) = -1$. Således är

$$y = -\sqrt{2e^{-t^2} - 1}$$

den sökta lösningen.

(2) Samtliga lösningar till ekvationen

$$(1-t^2)y''(t)+2ty'(t)-2y(t)=0, \quad -1<t<1$$

är polynom av grad ≤ 2. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen, samt den lösning som uppfyller $y(0)=3, y'(0)=-4$.

Lösning: Eftersom det är givet att samtliga lösningar är polynom av grad högst 2, söker vi lösningar till ekvationen på formen $y=a+bt+ct^2$. Insättning i ekvationen ger oss

$$0=(1-t^2)y''(t)+2ty'(t)-2y(t)=(1-t^2)2c+2t(b+2ct)-2(a+bt+c^t2)=2c-2a.$$

Vi ser att villkoret för att $y=a+bt+ct^2$ ska vara en lösning är att $2c-2a=0$, dvs $a=c$. Således, för varje val av konstanterna a och b så är $y=a+bt+at^2=a(1+t^2)+bt$ en lösning. Speciellt är $y_1=1+t^2$ och $y_2=t$ lösningar, och de bildar en fundamental lösningsmängd. Således är det den allmänna lösningen vi har hittat, dvs

$$y=c_1(1+t^2)+c_2t$$

är den allmänna lösningen.

För att hitta den lösning som uppfyller b.v. deriverar vi först: $y'=2c_1t+c_2$. Vi får $3=y(0)=c_1$ och $-4=y'(0)=c_2$. Alltså

$$y=3(1+t^2)-4t$$

är lösningen som uppfyller b.v.

(Alternativt kan problemet lösas med reduktion av ordning; man ser lätt att $y_1=t$ är en lösning till ekvationen.)

(3) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\frac{dx}{dt}=4x-3y$$
$$\frac{dy}{dt}=3x+4y$$

samt skissa den lösning $(x(t),y(t))$ (för $t>0$) som uppfyller $x(0)=1, y(0)=0$.

Lösning: Ekvationen kan skrivas på matrisform:

$$\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$$

där

$$\mathbf{x}(\mathbf{t})=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A=\begin{pmatrix}4&-3\\3&4\end{pmatrix}.$$

Matrisen A har egenvärdena $\lambda=4\pm 3i$. Vektorn

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$$

är en egenvektor motsvarande egenvärdet $\lambda = 4 - 3i$. Således är

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}_1 e^{(4-3i)t}$$

en (komplex) lösning till ekvationen. Vi vet från teorin att real- och imaginärdelen av denna lösning är två linjärt oberoende lösningar till ekvationen. Vi har

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(4-3i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{4t}(\cos 3t - i \sin 3t) = e^{4t}\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} + ie^{4t}\begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$$

två (reella) linjärt oberoende lösningar. Därför vet vi att den allmänna lösning till ekvationen är

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$$

där c_1, c_2 är konstanter.

Det är lätt att se att

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$$

är den lösning som går igenom punkten $(1, 0)$. Detta är en spiral som snurrar utåt, moturs (rita figur).

(4) Lös integralekvationen

$$e^{-t} = y(t) + 2\int_0^t \cos(t-u)y(u)du$$

Lösning: Vi använder Laplacetransform. Notera att vi har en faltning i högerledet. Transformering ger

$$\frac{1}{s+1} = Y(s) + 2\frac{s}{s^2+1}Y(s).$$

Högerledet kan skrivas

$$Y(s) + 2\frac{s}{s^2+1}Y(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+1}Y(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2+1}Y(s).$$

Således får vi

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^3}.$$

Partialbråksuppdelning av högerledet ger oss

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^3} = \left\{\frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}\right\} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}.$$

Inverstransform (använd L22 i Beta) ger nu

$$y(t) = e^t - 2te^{-t} + t^2e^{-t} = (t-1)^2e^{-t}.$$

(5) Differentialekvationen

$$2xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0,$$

har $x = 0$ som en reguljär singulär punkt.
a) Bestäm indexekvationen samt rekursionsrelationen. (Tips: indexekvationen har en dubbelrot.) **(2p)**

b) Bestäm en (icke-trivial) serielösning ($x > 0$) till differentialekvationen. **(2p)**

Lösning: Vi använder Frobenius metod och söker lösningar på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}.$$

där $a_0 \neq 0$.

a) Termvis derivering ger

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} = r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}$$

och

$$xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n x^{r+n-1} = (r-1) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n x^{r+n-1}.$$

Notera också att vi kan skriva

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n-1}.$$

Insatt i ekvationen fås nu

$$\begin{aligned} 0 =& 2xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 2\left((r-1) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n x^{r+n-1}\right) + \\ &+ 2\left(r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n-1} = \\ &= r^2 a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2(r+n-1)(r+n) a_n + 2(r+n) a_n - a_{n-1}\right) x^{r+n-1}. \end{aligned}$$

Samtliga kofficienter i högerledet måste vara noll. Eftersom $a_0 \neq 0$ måste $r^2 = 0$ (indexekvationen), dvs $r = 0$. Vidare måste vi ha

$$0 = 2(r+n-1)(r+n) a_n + 2(r+n) a_n - a_{n-1} = 2(r+n)^2 a_n - a_{n-1}$$

för alla $n \geq 1$, dvs

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2}, \quad n \geq 1.$$

Eftersom vi måste ha $r=0$ får vi rekursionsrelationen

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2n^2}, \quad n \geq 1.$$

b) Vi söker nu en serielösning. Vi väljer $a_0 = 1$. Rekursionsrelationen ger då

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{a_1}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 2^2}, a_3 = \frac{a_2}{2 \cdot 3^2} = \frac{1}{2^3(3!)^2}.$$

Vi ser mönstret (vilket med fördel visas med hjälp av induktion):

$$a_n = \frac{1}{2^n(n!)^2}.$$

Således är

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n!)^2}$$

en serielösning till den givna ekvationen.

(6) Ekvationen

$$\theta''(t) + \sin\theta(t) = 0$$

beskriver rörelsen av en pendel. Skriv om ekvationen som ett första ordningens system och avgör om den kritiska punkten $(0,0)$ (svarande mot $\theta = 0,\ d\theta/dt = 0$) är stabil eller instabil.

Lösning: Använd Lyapunovs direkta metod för att visa att $(0,0)$ är en stabil kristisk punkt. Se Ex 2, sid 559 i B-DP. (Det går ej att använda linjarisering.)

(7) a) Låt A vara en reell $n \times n$-matris, och låt $\mathbf{\Phi}(t)$ vara fundamentalmatrisen som uppfyller

$$\mathbf{\Phi}'(t) = A\mathbf{\Phi}(t), \quad \mathbf{\Phi}(0) = I$$

där I är identitetsmatrisen. Visa att $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{\Phi}(s+t)$ för alla $t, s \in \mathbb{R}$. **(3p)**

b) Bestäm $\mathbf{\Phi}(t)$ i fallet då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

och visa att $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{\Phi}(s+t)$ för alla $t, s \in \mathbb{R}$. **(1p)**

Lösning:

a) Vi vet från den allmänna teorin att givet ett begynnelsevillkor $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ och ett $t_0 \in \mathbb{R}$, så har begynnelsevärdesproblemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

en unik lösning $\mathbf{x}(t)$, och lösningen existerar för alla t. Fundamentalmatrisen $\mathbf{\Phi}(t)$ har den egenskapen att lösningen ges av

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}^0.$$

Låt t_0, s vara godtyckliga, och tag $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Låt $\mathbf{x}(t)$ vara lösningen till

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$$

och låt $\mathbf{y}(t)$ vara lösningen till

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}(t_0).$$

Då följer från entydigheten att $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ för alla t. Noter att vi har

$$\mathbf{x}(s + t_0) = \mathbf{\Phi}(s + t_0)\mathbf{x}^0.$$

och

$$\mathbf{y}(s + t_0) = \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{\Phi}(s)(\mathbf{\Phi}(t_0)\mathbf{x}^0) = \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{\Phi}(t_0)\mathbf{x}^0.$$

Eftersom vänsterleden i de två ekvationerna ovan är lika så har vi alltså

$$\mathbf{\Phi}(s + t_0)\mathbf{x}^0 = \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{\Phi}(t_0)\mathbf{x}^0.$$

Eftersom detta gäller för varje val av $\mathbf{x}^0$ så måste de två matriserna $\mathbf{\Phi}(s + t_0)$ och $\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{\Phi}(t_0)$ vara lika.

b) Eftersom A är en diagonalmatris, så det är lätt att se att vi får

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Vi noterar att

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t+s} & 0 \\ 0 & e^{-(t+s)} \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(t + s).$$

(8) Låt p och q vara två kontinuerliga 1-periodiska reellvärda funktioner. Visa att ekvationen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$$

har en 1-periodisk lösning $x(t)$ om ekvationen har en lösning $x(t)$ som uppfyller $x(0) = x(1)$.

Lösning: Eftersom vi har en linjär ekvation, och eftersom p och q är kontinuerliga på hela $\mathbb{R}$, så vet vi att om a är ett givet tal, så finns det en unik lösning $x(t)$ till ekationen som uppfyller $x(0) = a$ (det finns t o m en formel för lösningen). Lösningen existerar för alla t.

Antag nu att $x_1(t)$ är en lösning sådan att $x_1(0) = x_1(1)$. Planen är att visa att $x_1(t)$ faktiskt är 1-periodisk, dvs att $x_1(t + 1) = x_1(t)$ för alla t.

Låt $x(t) = x_1(t+1)$, och låt $a = x_1(0)$. Speciellt har vi $x(0) = x_1(1) = x_1(0) = a$. Eftersom x_1 är en lösning så har vi

$$x_1'(t + 1) + p(t + 1)x_1(t + 1) = q(t + 1)$$

för alla t. Utnyttjar vi nu att p och q är $1-$periodiska, och att $x_1(t + 1) = x(t)$, så kan detta skrivas

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t).$$

Således är både $x(t)$ och $x_1(t)$ lösningar till ekvationen, och $x(0) = x_1(0) = a$. Alltså måste de vara identiska, dvs $x_1(t) = x(t)$ för alla t. Men eftersom $x(t) = x_1(t+1)$ så har vi alltså visat att $x_1(t+1) = x_1(t)$ för alla t.