

DN1212, DN1214, DN1240-41, DN1243, SF1516-19, SF1541, SF1543

LÖSNING Tentamen i Numeriska metoder , Onsdag 2015-01-08, 9–12

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

- (3p) 1. Givet följande approximationsformel

$$f'(a) \approx \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h}$$

för derivatan av en funktion $f(x)$. Felet i formeln bestäms med Taylorutveckling till

☐ $h^2 f''(a)$

☐ $2h^2 f''(a)$

☒ $h f''(a)$

☐ $2h f''(a)$

☐ $h^2 f'''(a)$

☐ $2h^2 f'''(a)$

☐ $h^4 f'''(a)$

☐ $2h^4 f'''(a)$

- (3p) 2. För att beräkna $\sqrt[3]{3}$ så formuleras ekvationen

$$x^3 - 3 = 0,$$

Newtons metod använd på denna ekvation kan skrivas

☐ $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2} \frac{1}{x_n^3}$

☐ $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{3}{x_n^3}$

☒ $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{x_n^2}$

☐ $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2x_n}$

☐ $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{x_n^3}$

☐ $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2x_n}$

- (2p) 3. Vi vet att $\sqrt[3]{3} = 1.44$ med två korrekta decimalers noggrannhet. Antag att vi använder startvärdet $x_0 = 1.44$ i Newtons metod i tal 2. Hur stort blir felet efter tre iterationer, dvs $x_3 - \sqrt[3]{3}$

☐ 10^{-2}

☐ 10^{-8}

☐ 10^{-3}

☐ 10^{-12}

☐ 10^{-4}

☒ 10^{-16}

☐ 10^{-6}

- (3p) 4. Minstakvadratanpassning görs av ett tredjegradspolynom till givna mätdata y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 vid x -värdena x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Problemet leder till ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{z} \approx \mathbf{b}$. Vilka påståenden nedan är sanna? Residualvektorn betecknas med $\mathbf{r}$.

a.

b.

c.

☐ $\mathbf{r}$ har 2 komponenter

☐ A har 2 rader

☐ A har 2 kolumner

☐ $\mathbf{r}$ har 3 komponenter

☐ A har 3 rader

☐ A har 3 kolumner

☐ $\mathbf{r}$ har 4 komponenter

☐ A har 4 rader

☒ A har 4 kolumner

☒ $\mathbf{r}$ har 5 komponenter

☒ A har 5 rader

☐ A har 5 kolumner

5. Givet en vektorvärd funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2/4 + xy - 4.01 \\ 2x^5y^2 + x - 2y^3/3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (2p) För att kunna använda Newtons metod på systemet $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0$ behöver vi beräkna Jakobianen

Namn: **Personnr:**

till funktionen. Låt startgissningen till Newtons metod vara $x_0 = 1, y_0 = 2$. Värdet av elementet på andra raden, andra kolumnen av Jakobianen är

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|
| ☐ 8 | ☐ 101 |
| ☐ 21 | ☒ 0 |
| ☐ 4.01 | ☐ 4 |

(2p) 6. Följande tabell är given.

x	1000.2	1000.3	1000.6
y	1000	1010	1280

Med Newtons ansats för det interpolationspolynom $P(x)$ som går genom samtliga punkterna erhålls andragskoefficienten

- | | |
|-------------------------------|--|
| ☐ 10 | ☐ -1000.2 |
| ☐ 100 | ☐ 1280 |
| ☐ 200 | ☒ 2000 |
| ☐ 1000 | ☐ 10000 |

(1p) 7. Vad blir värdet av interpolationspolynomet i uppgift 1. då $x=1000.6$?

- | | |
|-------------------------------|--|
| ☐ 10 | ☐ -1000.2 |
| ☐ 100 | ☒ 1280 |
| ☐ 200 | ☐ 2000 |
| ☐ 1000 | ☐ 10000 |

(2p) 8. En dator löser ett tridiagonalt linjärt ekvationssystem med 100 ekvationer och 100 obekanta på 0.4 sekunder. Hur många sekunder tar det för samma dator att lösa ett tridiagonalt system med 5000 ekvationer och obekanta?

- | | |
|--|-------------------------------|
| ☐ 0.5 | ☐ 2 |
| ☐ 5 | ☐ 12.5 |
| ☒ 20 | ☐ 50 |
| ☐ 125 | ☐ 250 |

9. Givet differentialekvationen

$$\frac{dz}{dt} - 10z^2 = -10, \quad z(0) = -1,$$

(2p) Vi löser problemet med Eulers metod med steglängden $h=0.01$. Efter 100 steg blir lösningen $z_{100} \approx z(1)$ enligt nedan

- | | |
|-----------------------------|--|
| ☐ 10 | ☐ -0.01 |
| ☐ 1 | ☒ -1 |
| ☐ 0 | ☐ -10 |