

Lösning

DN1212, DN1214, DN1240-41, DN1243, SF1516-19, SF1541, SF1543

Om Tentamen i Numeriska metoder, Onsdag 2015-01-08, 9–12

- (8) **P1a.** `x=[801;803;805;806]; y=[102;110;126;114];`
`m=804;`
`A=[ones(size(x)) x-m (x-m).^2 (x-m).^3];`
`c=A\y;`
`xp=[801:0.1:806]';`
`yp=c(1)+c(2)*(xp-m)+c(3)*(xp-m).^2+c(4)*(xp-m).^3;`
`plot(x,y,'o',xp,yp)`

- (7) **P1b.** Maximum erhålls för det x -värde som satisfierar $P'(x) = 0$.

$$P'(x) = c_2 + 2c_3(x - 804) + 3c_4(x - 804)^2 = 0$$

Detta är en andragradsekvation med lösningarna

$$x = 804 - \frac{c_3}{3c_4} \pm \sqrt{\frac{c_3^2}{9c_4^2} - \frac{c_2}{3c_4}}$$

Den ena lösningen ger maxpunktens läge.

```
p=c(3)/(3*c(4)); q=sqrt(p^2-c(2)/(3*c(4)));  
x1=804-p-q; x2=804-p+q;  
y1=c(1)+c(2)*(x1-m)+c(3)*(x1-m).^2+c(4)*(x1-m).^3;  
y2=c(1)+c(2)*(x2-m)+c(3)*(x2-m).^2+c(4)*(x2-m).^3;  
[x1 y1; x2 y2] %
```

- (10) **P2a.** `function f=fp2(t,y)`
`f=[y(2)`
`-7*y(1)-0.1*y(2)+2*y(3)`
`y(4)`
`1.5*sin(0.5*t)+y(1)-3.5*y(3)-0.1*y(4)];`

```
-----  
  
y0=[0.1; 0.3; 0.2; 0.4];  
h=pi/30;  
format compact  
for i=1:4  
    t=0; y=y0; tslut= 4*pi -h/2;  
    yp=y'; tp=t;  
    while t < tslut,
```

```

f1=fp2(t,y);
f2=fp2(t+h,y+h*f1);
y=y+h*(f1+f2)/2; yp=[yp;y'];
t=t+h;          tp=[tp; t];
end
disp([h t y(1) y(3)])
h=h/2;
end
plot(tp,yp(:,1),tp,yp(:,3))

```

- (3) **P2b.** Villkorssatsen ändras till `while y(3) > y(1)` När villkoret ej längre är uppfyllt har de två kurvorna just skurit varandra. De två sista raderna i lösningstabellen används därefter för att definiera en rät linje i t för $y(3) - y(1)$, dvs för skillnaden mellan $z(t)$ och $y(t)$. Vi genomför således linjär interpolation till $z(t) - y(t)$. Då behövs funktionsvärden i de två punkterna. Dessa beräknas från värden på de sista två raderna i lösningstabellen. Den rätta linjens skärning med t -axeln beräknas därefter analytiskt. Felet blir proportionellt mot steglängden i kvadrat.
- (7) **P2c.** Jag använder y -värdena. Analysen kan även göras för z -värdena. Låt $y(h)$ beteckna den numeriska lösningen i slutpunkten, beräknad med vår metod med steglängden h , och y står för den exakta lösningen värde i samma punkt. Då gäller

$$y(h) = y + ch^p + \dots$$

Med de tre steglängderna H , $2H$ och $4H$ insatta får vi

$$y(4H) = y + c(4H)^p + \dots$$

$$y(2H) = y + c(2H)^p + \dots$$

$$y(H) = y + c(H)^p + \dots$$

Subtrahera parvis så elimineras y och dividera därefter respektive led så får vi

$$\frac{y(4H) - y(2H)}{y(2H) - y(H)} = \frac{(4H)^p - (2H)^p}{(2H)^p - H^p} = 2^p$$

Med de tre sista tabellvärdena insatta blir kvoten

$$\frac{-0.0032}{-0.0008} = 4$$

Således är $p = 2$

- (8) **P3a.** a. Inför beteckningen u_i för en approximation till $u(t_i)$. Låt $t_i = 1 + i \times h$ så kan vi skriva approximationsformeln

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - t_i u_i = 0$$

Om intervallet $(1, 3)$ delas in i fyra lika delar så blir steglängden $h = 2/4 = 0.5$, så diskretiseringsnätet blir $t_0 = 1, t_1 = 1.5, t_2 = 2, t_3 = 2.5, t_4 = 3$. Punkterna $t_1, \dots, t_3$ är de inre punkterna. Vi formulerar approximationerna i de tre inre punkterna och får

$$t = t_1 : \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} - 1.5u_1 = 0$$

$$t = t_2 : \frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} - 2u_2 = 0$$

$$t = t_3 : \frac{u_4 - 2u_3 + u_2}{h^2} - 2.5u_3 = 0$$

Vi stuvlar om i ekvationerna, förlänger med h^2 och använder $u_0 = 2, u_4 = 4$ så får vi

$$\begin{pmatrix} -2 - h^2 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 - h^2 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 - h^2 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(7) P3b. Den enklaste tentamenslösningen är att behålla diskretiseringsnätet som det är och representera derivatarandvillkoret med en framåtdifferens vilket ger

$$u_1 = u_0$$

. Om vi ersätter u_0 i ekvationen vid $t = t_1$ med u_1 så får vi följande ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} -1 - h^2 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 - h^2 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 - h^2 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$