KTH Engineering Sciences

Teori- och räkneuppgifter

Version 2.2, December 7, 2014

1. **Fel- och störningsanalys**

1.1 Värdet på x är uppmätt till 0.956 med ett absolutfel på högst 0.0005. Ge en övre gräns för absolutfelet i $y = \exp(x) + x^2$. Motivera svaret.

1.2 Ekvationen $\log(x) - x/50 = 0$ löstes med Newtons metod och avbrottskriteriet $|\log(x_n) - x_n/50| < 10^{-10}$. Resultatet blev $x_n = 282.1158987499664$. Ge en övre gräns för absolutfelet i x_n (jämfört med den exakta roten). Motivera svaret.

1.3 Ett komplicerat problem med indata a, b och c löses och ger resultatet y. Indata har felgränserna $a \pm 0.01$, $b \pm 0.02$ och $c \pm 0.005$. Hur kan man med experimentell störningsräkning skatta felet i y?

1.4 Ett ljus placeras 0.750 ± 0.001 meter från en skärm. En lins hålls mellan ljuset och skärmen. Man hittar två punkter där linsen ger en skarp bild av ljuset på skärmen. Punkterna ligger 0.25 ± 0.002 meter från varandra.
Bestäm linsens brännvidd f med felgräns E_f.

Ledning: Linsformeln

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

relaterar brännvidden f med ljusets avstånd a till linsen och skärmens avstånd b till linsen, när bilden är fokuserad.

1.5 Konditionstalet för ett problem ligger på 10000. Hur många korrekta siffror måste indata ha för att lösningen med säkerhet ska få sex siffrors noggrannhet?

1.6 Ett ekvationssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösts med dator. Vi vet att komponenterna i $\mathbf{b}$ är uppmätta värden med osäkerheter $\pm 10^{-3}$. Förutom lösningen $\mathbf{x}$ har följande maximumnormer beräknats: $\|\boldsymbol{x}\| = 12.5$, $\|A\| = 5$, $\|A^{-1}\| = 800$, $\|\boldsymbol{b}\| = 125$. Härled en skattning av osäkerheten i lösningen.

1.7 Beräkna konditionstalet för en diagonalmatris med diagonalelementen $2/k,\ k = 1, 2, \dots, 20$.

1.8 Beräkna konditionstalen för matriserna

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Olinjära ekvationer**

2.1 Ekvationen $x^5 = x + 1$ har en rot mellan 1 och 2 och löses med intervallhalveringsmetoden (bisection method). Beskriv metoden. Hur många intervallhalveringar behövs för att bestämma roten med ett fel som är mindre än 10^{-6}?

2.2 Ekvationen $\cos(x) - x^2 = 0$ har en rot nära 0.825. Formulera ekvationen som ett fixpunktproblem och undersök om motsvarande fixpunktiteration kan konvergera mot roten.

2.3 Vad krävs för att iterationen $y_{n+1} = g(y_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, med y_0 given, skall konvergera mot en rot $y^* = g(y^*)$? Motivera svaret genom att betrakta felet $e_n := y_n - y^*$ och taylorutveckla $g(y)$ runt y^*.

2.4 Vad menas med att fixpunktiteration har linjär konvergens? Beskriv i ord och formler. När kan konvergensen bli bättre och sämre?

2.5 Vad menas med att Newtons metod har kvadratisk konvergens? Beskriv i ord och formler. När kan konvergensen bli sämre?

2.6 Beskriv detaljerat Newtons metod för lösning av ett ickelinjärt ekvationssystem.

2.7 Beskriv sekantmetoden för en skalär ekvation. Hur många startvärden krävs? Hur många funktionsberäkningar krävs i varje iterationssteg? Ange en nackdel och en fördel hos sekantmetoden i jämförelse med Newtons metod.

2.8 För en iterativ metod uppskattas felen e_n i iterationerna till

$$e_1 = 0.11345, \quad e_2 = 1.48995 \cdot 10^{-2}, \quad e_3 = 2.48929 \cdot 10^{-4}, \quad e_4 = 6.416252 \cdot 10^{-8}.$$

Vilken konvergensordning motsvarar detta troligen?

3. **Linjära ekvationssystem**

3.1 Hur definieras maxnormen av en matris? Beräkna maxnormen för matriserna

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.2 Antag att $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ och $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Vad är beräkningskostnaden i termer av n för att

(a) beräkna vektorn $A\boldsymbol{x}$

(b) lösa $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ om A är en full matris,

(c) lösa $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ om A är en triangulär matris,

(d) lösa $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ om A är en tridiagonal matris,

(e) beräkna matrisen AB (både A och B fulla matriser),

(f) beräkna vektorn $AB\boldsymbol{x}$ (både A och B fulla matriser),

3.3 Om ett ekvationssystem med fylld systemmatris och 17 obekanta tar 17 millisekunder att lösa, hur lång tid ungefär tar det att lösa ett liknande system med 340 obekanta?

3.4 Om lösningen (med en effektiv algoritm) av ett tridiagonalt system med 500 obekanta tar 0.1 sek, hur lång tid tar en effektiv lösning av ett tridiagonalt system med 10000 obekanta? Man kan undvika att lagra hela matrisen, hur mycket vinner man i lagringsutrymme i det stora systemet ovan?

3.5 Om lösningen (med en effektiv algoritm) av ett triangulärt system med 1000 obekanta tar 1 sek, hur lång tid tar det att lösa ett triangulärt system med 5000 obekanta?

3.6 Vad menas med pivotering vid lösning av linjära ekvationsystem? Varför används det?

3.7 Betrakta den iterativa metoden $P\boldsymbol{x}_{n+1} = B\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}$ för att lösa ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (där alltså $A = P - B$). Vad krävs av P och B för att metoden ska konvergera och inte ha alltför hög beräkningskostand? Jacobis metod kan skrivas på den här formen med ett speciellt val av P. Vilket?

3.8 Vad är LU-faktoriseringen av en matris A? Antag att vi redan har A-matrisens LU-faktorisering. Visa hur man då löser $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Vad blir beräkningskostnaden?

3.9 Hur kan man med hjälp av LU-faktorisering effektivisera problemet att lösa $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_k$ för väldigt många högerled $\boldsymbol{b}_k$ (men hela tiden samma A)?

3.10 Ge ett tillräckligt villkor på matrisen A för att Jacobis och Gauss–Seidels (iterativa) metoder ska konvergera när man vill lösa $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

3.11 Härled beräkningskostnaden i termer av n (dvs komplexiteten) för att LU-faktorisera en full matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

3.12 Antag att $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är en övertriangulär matris. Härled beräkningskostnaden i termer av n (dvs komplexiteten) för att lösa $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ med bakåtsubstitution.

3.13 Antag att $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är en tridiagonal matris. Härled beräkningskostnaden i termer av n (dvs komplexiteten) för att lösa $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ med en effektiv algoritm som tar hänsyn till matrisens gleshet.

3.14 Antag att $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är två fulla matriser. Härled beräkningskostnaden i termer av n (dvs komplexiteten) för vanlig matris-matrismultiplikation, dvs för att beräkna $C = AB$.

4. Egenvärden

4.1 Beskriv potensmetoden (power method) för egenvärdesberäkningar. Vilka egenvärden kan man räkna ut med denna metod?

4.2 Beskriv inversa potensmetoden (inverse power method) för egenvärdesberäkningar. Vilka egenvärden kan man räkna ut med denna metod?

5. Approximationsteori

5.1 Vi vill använda ett polynom för att interpolera värdena $y_1, \ldots, y_4$ i x-koordinaterna $x_1, \ldots, x_4$. Vilket gradtal kommer polynomet i allmänhet ha? Visa att polynomets koefficienter kan beräknas genom att lösa ett linjärt ekvationssystem.

5.2 Vi vill att polynomet $p(x)$ ska interpolera värdena 1, 3, -1, 2 vid $x = -3, -2, 1, 5$. Ställ upp ett linjärt ekvationssystem för koefficienterna till $p(x)$ där du specificerar elementen i systemmatrisen och i högerledet.

5.3 Varför bör man undvika interpolation med polynom av högt gradtal och ekvidistanta interpolationspunkter? Vad är bättre alternativ?

5.4 Vad är noggrannhetsordningen för styckvis linjär interpolation? Det vill säga, hur beror (det punktvisa) felet på avståndet h mellan noderna?

5.5 Vad är kubiska splines?

5.6 Bestäm minstakvadratlösningen till $c_1 - c_2 \approx 2$, $c_2 \approx 2$, $c_1 + c_2 \approx 12$. Vad är det som minimeras? Vad menas med normalekvationerna?

5.7 Minstakvadratanpassning till modellen $y = a\cos(x) + b\cos(2x)$ görs till givna mätdata $y_1, \ldots, y_5$ vid x-värdena $-\pi/2$, $-\pi/4$, 0, $\pi/4$, $\pi/2$. Hur ser ekvationssystemet för de obekanta a, b ut? Vad kallas dessa ekvationer?

5.8 Antag att $f \in C^2([a,b])$. Härled följande feluppskattning för linjär interpolation $p_{\text{lin}}(x)$ av f i $x = a, b$,

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - p_{\text{lin}}(x)| \le \frac{1}{8} h^2 \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|,$$

där $h = b - a$. (Du får använda resultatet i Sats 3.4 i Sauer.) Hur ser motsvarande feluppskattning ut för *styckvis* linjär interpolation i noderna $x_j = jh$, $j = 0, \ldots, n$?

5.9 Vi söker det tredjegradspolynom $p(x)$ som interpolerar $f(x) = \sin(x)$ i $x = 0$ och $x = \pi/2$, och som även har samma derivata som f i dessa punkter, $f'(0) = p'(0)$ och $f'(\pi/2) = p'(\pi/2)$. Specificera det linjära ekvationsystem för koefficienterna i $p(x)$ som behöver lösas. (Denna typ av interpolation kallas *Hermiteinterpolation*.)

5.10 Givet följande tabell över $\tan(x)$ i intervallet $[0, 1]$:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\tan(x)$	0	0.1003	0.2027	0.3093	0.4228	0.5463

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\tan(x)$	0.6841	0.8423	1.0296	1.2602	1.5574

(a) Beräkna $\tan(0.37)$ med hjälp av styckvis linjär interpolation i tabellen.
(b) Uppskatta felet i det beräknade värdet i (a).
(c) Lös ekvationen $\tan(x) = 1.3$ med hjälp av styckvis linjär interpolation.
(d) Uppskatta felet i din lösningen i (c).
(e) I tabellen har vi 10 delintervall. Hur många delintervall behövs för att alla värden beräknade med styckvis linjär interpolation ska ha två korrekta decimaler.

(Du kan bortse från avrundningsfelen i denna fråga.)

6. Numerisk derivering och integration

6.1 Vad menas med noggrannhetsordningen för en numerisk metod, t.ex. för att beräkna integraler?

6.2 Derivatan av en funktion kan approximeras med framåt- respektive centraldifferenskvot. Härled noggrannhetsordningen i båda fallen med hjälp av taylorutveckling.

6.3 Beskriv (sammansatta) trapetsregeln för integralberäkning. Vilken noggrannhetsordning har metoden?

6.4 Beskriv (sammansatta) Simpsons formel för integralberäkning. Vilken noggrannhetsordning har metoden?

6.5 En integral approximeras med en numerisk metod. När man använder delintervall med längderna 0.4, 0.2 och 0.1 får man felen 0.0231, 0.00291 och 0.0003592. Vilken noggrannhetsordning har metoden? Motivera!

6.6 Hur skattar man felet och noggrannhetsordningen vid integralberäkning med trapetsregeln med hjälp av beräkningar med olika antal delintervall?

6.7 En integral approximeras med en numerisk metod. När man använder delintervall med längderna 0.5, 0.25 och 0.125 får man följande approximationer av den exakta integralen: 0.464521, 0.460897 och 0.459997. Vilken noggrannhetsordning har troligen metoden? Motivera!

7. **Ordinära differentialekvationer**

7.1 Skriv differentialekvationen

$$y''' - t^2 y'' + y'/2 + y^2/(1+t) - 1 = 0,$$
$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad y''(0) = y_2,$$

som ett första ordningens system.

7.2 Betrakta differentialekvationerna

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y^2 - x + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -x^2 - y + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \sin(t),$$
$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

(a) Skriv differentialekvationerna som ett första ordningens system.

(b) Inför lämplig notation och formulera metoden Framåt Euler för systemet. Definiera alla ingående variabler.

7.3 Förklara följande begrepp som karaktäriserar en numerisk metod för begynnelsevärdesproblem. Exemplifiera dem för Framåt Euler.

(a) Lokalt trunkationsfel

(b) Globalt fel

(c) Noggrannhetsordning

(d) "metoden är konvergent"

(e) "metoden är konsistent"

7.4 Beräkna lokala trunkationsfelet för Framåt Euler,

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n).$$

Vad är noggrannhetsordningen?

7.5 Beräkna lokala trunkationsfelet för Bakåt Euler,

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

Vad är noggrannhetsordningen?

7.6 Beräkna lokala trunkationsfelet för Trapetsregeln,

$$u_{n+1} = u_n + h\frac{f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})}{2}.$$

Vad är noggrannhetsordningen?

7.7 Givet metoden

$$u_{n+1} = u_n + h\alpha f(t_n, u_n) + h\beta f(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

För vilka värden på α och β är metoden a) ej konsistent, b) första ordningens noggrann, c) andra ordningens noggrann?

7.8 Vad är stabilitetsområdet för en numerisk ODE-metod? Hur definieras det? Varför är det intressant?

7.9 Härled stabilitetsområdet för Framåt Euler.

7.10 Vad menas med att en numerisk ODE-metod för begynnelsevärdesproblem är explicit respektive implicit? Är Trapetsregeln,

$$u_{n+1} = u_n + h\frac{f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})}{2},$$

explicit eller implicit?

7.11 Vad menas med en styv differentialekvation? Vilka problem medför en styv differentialekvation för explicita metoder?

7.12 För vilka värden på steglängden h är Framåt Euler absolutstabil när den tillämpas på differentialekvationerna

(a)
$$y' = -10y,$$

(b)
$$y' = -10 + \sin(t),$$

(c)
$$y' = (\sin(t) - 2.5)y,$$

(d)
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & -500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

(e)
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

(f)
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -17 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

7.13 För vilka värden på steglängden h är Bakåt Euler absolutstabil när den tillämpas på differentialekvationerna i uppgift 7.12?

7.14 Betrakta Runge–Kutta 2 ("explicita trapetsregeln"),

$$u_{n+1} = u_n + h\frac{f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n))}{2}.$$

(a) Beräkna lokala trunkationsfelet. Vad är noggrannhetsordningen?

(b) Ge ett uttryck som beskriver metodens stabilitetsområde.

(c) För vilka steglängder är metoden absolutstabil när den tillämpas på differentialekvationen

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

7.15 Ge ett uttryck som beskriver stabilitetsområde för trapetsregeln,

$$u_{n+1} = u_n + h\frac{f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})}{2}.$$

8. **Randvärdesproblem**

8.1 Vad är skillnaden mellan ett begynnelsevärdesproblem och ett randvärdesproblem?

8.2 Vi vill lösa det linjära randvärdesproblemet

$$-u_{xx} + 4u_x - u = f(x), \qquad u(0) = (1) = 0,$$

med finita differenser.

(a) Hur diskretiserar man ekvationen och approximerar den med ett linjärt ekvationssystem $Au = f$?

(b) Hur ser matrisen A ut? Hur kan man lösa ekvationssystemet effektivt?

(c) Vad blir noggrannhetsordningen?

8.3 Vi vill lösa det olinjära randvärdesproblemet

$$-u_{xx} + a(x)u_x = f(u), \qquad u(0) = (1) = 0,$$

med finita differenser.

(a) Hur diskretiserar man ekvationen och approximerar den med ett olinjärt ekvationssystem $F(u) = 0$?

(b) Hur ser funktionen F och dess jakobian ut? Hur kan man lösa ekvationssystemet?

8.4 Betrakta randvärdesproblemet för funktionen $u(x)$

$$u_{xx} + xu'_x + 3(1 - x^2)u = \sin(\pi x), \qquad 1 < x < 3,$$

$$u(1) = 0, \quad u(3) = 1.$$

(a) Formulera finita differensmetoden för att lösa detta problem. Visa hur metoden leder till ett linjärt ekvationssystem

$$Au = b.$$

Specificera elementen i A-matrisen, högerledet b och lösningsvektorn u.

(b) Utnyttja approximationen

$$u_x(x) = \frac{-3u(x) + 4u(x+h) - u(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

och visa hur finita differensmetoden och ekvationssystemet ändras när man istället för $u(1) = 0$ har randvillkoret $u(1) + u_x(1) = 0$.