SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 12 januari 2015

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del A på tentamen utgörs av de första tre uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de sista tre uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = xe^{1/x}$.
   A. Bestäm definitionsmängden till f.
   B. Beräkna de fyra gränsvärdena $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ och $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)$
   C. Bestäm alla lokala extrempunkter till f.
   D. Skissa med hjälp av ovanstående kurvan $y = f(x)$

2. Beräkna integralen
$$\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx$$
   genom att göra följande:
   A. Skriv om integralen med hjälp av substitutionen $\sqrt{x} = t$ (glöm inte gränserna).
   B. Beräkna, med hjälp av partiell integration, integralen du fått fram i uppgift A .

3. En plåtburk som rymmer 1 liter ska tillverkas i form av en cylinder med botten och lock. Bestäm höjden och bottenytans radie så att materialåtgången blir så liten som möjligt.

DEL B

4. Betrakta differentialekvationen $y''(t) + y(t) = \sin t$.
   A. Lös differentialekvationen.
   B. Avgör om det finns någon lösning till differentialekvationen som är begränsad.

5. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $x = 100$ till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ och använd det för att beräkna ett närmevärde till $\sqrt{104}$. Avgör sedan också om ditt närmevärde har ett fel som till absolutbeloppet är mindre än 10^{-4}.

6. Avgör om den generaliserade integralen
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + x}$$
   är konvergent eller divergent. Om den är konvergent, beräkna den.
   Tips: När $x \geq 1$ så är $\dfrac{1}{x^2} \geq \dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.

Var god vänd!

DEL C

7. A. Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i en punkt a.
   B. Definiera vad som menas med att en funktion f är deriverbar i en punkt a.
   C. Visa att en funktion f som är deriverbar i en punkt a också måste vara kontinuerlig i a.
   D. Ge ett exempel som visar att en funktion som är kontinuerlig i en punkt inte måste vara deriverbar i punkten.

8. Ett hål med radie 1 borras genom centrum av ett klot med radie 2. Hur stor andel av klotets volym är kvar?

9. Visa att funktionen
$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$$
är strängt växande.