Institutionen för matematik

SF1670 Flervariabelanalys II
Tentamen
Måndagen den 12 januari, 2015

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2 + y$ och området D som ges av olikheterna
$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \qquad \text{och} \qquad x^2 + y^2 \leq 1.$$
   (a) Förklara varför man i förväg kan veta att funktionen f antar ett största och ett minsta värde på området D. **(1 p)**
   (b) Bestäm det största och det minsta värdet som f antar på D. **(3 p)**

2. Använd en linjarisering kring punkten $(x_0\,, y_0) = (1\,, 2)$ för att approximera värdet av funktionen $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ i punkten $(1{,}2\;,\;2{,}1)$. **(4 p)**

3. Beräkna integralen
$$\iint_T 2xy\,dxdy$$
där T är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,1)$ och $(0,3)$, exempelvis genom att utföra variabelbytet $x = 2u$ och $y = u + 3v$. **(4 p)**

DEL B

4. Vektorfältet $\mathbf{F}(x,y)$ är definierat i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dvs i xy-planet förutom origo, genom

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

(a) Beräkna $\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där γ_1 är enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ orienterad moturs. **(2 p)**

(b) Beräkna $\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där γ_2 är cirkeln $(x-3)^2+y^2=1$ orienterad moturs. **(1 p)**

(c) Förklara hur vi kan veta att $\mathbf{F}(x,y)$ inte är konservativt. **(1 p)**

5. De två vektorvärda funktionerna $\mathbf{f}$ och $\mathbf{g}$ ges av

$$\mathbf{f}(x,y) = (x\cos y, x\sin y) \quad \text{och} \quad \mathbf{g}(x,y) = (xy, x^2-y^2)$$

för alla (x,y) i $\mathbb{R}^2$.

(a) Beräkna Jacobimatriserna $D\mathbf{f}(x,y)$ och $D\mathbf{g}(x,y)$. **(2 p)**

(b) Jacobimatrisen för sammansättningen $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ kan fås genom en matrismultiplikation. Illustrera detta genom att beräkna Jacobimatrisen $D(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(x,y)$. **(2 p)**

6. Arean av en buktig yta kan beräknas genom formeln

$$\iint_D \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\right| dsdt$$

där $\mathbf{r}(s,t)$ är en parametrisering av ytan över området D i st-planet.

Vi ska se på ytan som ges av den del av enhetsfären $x^2+y^2+z^2=1$ som ligger ovanför planet $z=1/2$.

(a) Skriv upp den dubbelintegral som behöver beräknas om vi använder sfäriska koordinater, dvs $(x,y,z)=(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, för att beräkna ytans area. **(1 p)**

(b) Skriv upp den dubbelintegral som behöver beräknas om vi använder cylindriska koordinater, dvs $(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1-r^2})$, för att beräkna ytans area. **(1 p)**

(c) Beräkna ytans area genom att beräkna någon av de två dubbelintegralerna från deluppgift (a) och (b). **(2 p)**

Var god vänd!

Del C

7. Betrakta ekvationen
$$x^y + y^{2x} = 2$$
i området $x, y > 0$.
   (a) Visa att denna ekvation i en omgivning av punkten $(x, y) = (1, 1)$ definierar y som en funktion av x, alltså $y = f(x)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm derivatan $f'(1)$, där f är funktionen från deluppgift (a). **(2 p)**

8. Låt Ω vara området som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ och $x^2 + y^2 \geq a^2$, och låt
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + yz, -xz + y, z - e^x \sin y).$$
Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut från Ω. **(4 p)**

9. Låt ℓ vara en linje och K en kropp i rummet. Beteckna det kortaste avståndet från punkten (x, y, z) till linjen ℓ med $D(x, y, z)$ och kroppens konstanta masstäthet med ρ. Tröghetsmomentet för K med avseende på linjen ℓ definieras genom
$$I_\ell = \rho \iiint_K D(x, y, z)^2 \, dxdydz.$$
Beräkna tröghetsmomentet för en homogen kub K med kantlängd s och massa m med avseende på axeln genom mittpunkten på två motstående sidor. **(4 p)**