

Lösningförslag till Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer  
II (del 2) den 13 januari 2015 kl 14:00 - 19:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).

**Preliminära betygsgränser:** 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatoren.

**Hjälpmedel:** Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.

**OBS:** För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

- (1) a) Låt  $V$  vara delrummet av  $C([0, 1])$  som består av alla linjärkombinationer av  $u_1(x) = 1$  och  $u_2(x) = \sqrt{x}$ . Bestäm en ortogonal bas för  $V$  med avseende på den inre produkten (1p)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

- b) För vilka värden på konstanterna  $a$  och  $b$  blir integralen

$$\int_0^1 |a + b\sqrt{x} - x|^2 dx$$

så liten som möjligt? (3p)

*Lösning:* a) Vi använder Gram-Schmidt för att få en ortogonal bas. Låt  $v_1 = u_1 = 1$  och

$$v_2(x) = u_2(x) - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \sqrt{x} - \int_0^1 \sqrt{x} dx = \sqrt{x} - 2/3.$$

Då är  $v_1$  och  $v_2$  en ortogonal bas för  $V$ .

b) Vi vet (Sats 5.3 på sidan 110) att integralen minimeras då  $a + b\sqrt{x}$  är den ortogonala projektionen  $P(u)$  av vektorn  $u(x) = x$  på  $V$ . Vi har (se sid 113)

$$P(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

Eftersom

$$\langle u, v_1 \rangle = \int_0^1 x dx = 1/2, \quad \|v_1\|^2 = \int_0^1 dx = 1$$

och

$$\langle u, v_2 \rangle = \int_0^1 x(\sqrt{x} - 2/3) dx = 1/15, \quad \|v_2\|^2 = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2/3)^2 dx = 1/18$$

fås

$$P(u) = \frac{1}{2} + \frac{18}{15}v_2 = \frac{1}{2} + \frac{6}{5}(\sqrt{x} - 2/3) = \frac{1}{2} + \frac{6\sqrt{x}}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{10} + \frac{6\sqrt{x}}{5}.$$

Alltså, vi ska välja

$$a = -\frac{3}{10}, \quad b = \frac{6}{5}.$$

(2) Bestäm  $a_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , om  $a_0 = 0$  och

$$a_{n+1} - \sum_{k=0}^n 2^k a_{n-k} = 1, \quad n \geq 0.$$

*Lösning:* Vi  $Z$ -transformerar ekvationen (notera att vi har en faltning i VL):

$$zA(z) - \frac{z}{z-2}A(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Vi löser ut  $A(z)$ :

$$A(z) = \frac{z-2}{(z-3)(z-1)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$A(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z-3} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-1}.$$

Inverstransform (t ex formel z11 i Beta) ger slutligen att

$$a_n = \frac{1}{2} 3^{n-1} + \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

(3) Bestäm en  $2\pi$ -periodisk reell funktion  $f(t)$  som uppfyller

$$f(t + \pi/4) - f(t) = 2 \cos t.$$

(Tips: tänk på Eulers formler.)

*Lösning:* Vi söker lösningar på formen

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

(det räcker faktiskt att ha en ändlig summa ovan, vilket vi kommer att se; så blir det inga konvergensproblem). Eftersom  $2 \cos t = e^{it} + e^{-it}$ , får vi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(t+\pi/4)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = e^{it} + e^{-it}.$$

VL kan skrivas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{in\pi/4} - 1) e^{int},$$

så vi får relationen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{in\pi/4} - 1) e^{int} = e^{it} + e^{-it}.$$

Detta är uppfyllt om vi väljer  $c_n$  så att

$$c_{-1}(e^{-i\pi/4} - 1) = 1, \quad c_1(e^{i\pi/4} - 1) = 1$$

och  $c_n = 0$  för alla  $n \neq \pm 1$  (notera att  $c_0$  kan väljas helt fritt).

Alltså

$$f(t) = \frac{1}{e^{-i\pi/4} - 1} e^{-it} + \frac{1}{e^{i\pi/4} - 1} e^{it}$$

uppfyller ekvationen. Notera att detta  $f$  faktiskt är reellt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{-i\pi/4} - 1} e^{-it} + \frac{1}{e^{i\pi/4} - 1} e^{it} &= \frac{(e^{i\pi/4} - 1)e^{-it} + (e^{-i\pi/4} - 1)e^{it}}{(e^{-i\pi/4} - 1)(e^{i\pi/4} - 1)} = \\ &= \frac{e^{-i(t-\pi/4)} - e^{-it} + e^{i(t-\pi/4)} - e^{it}}{1 - e^{-i\pi/4} - e^{i\pi/4} + 1} = \frac{2 \cos(t - \pi/4) - 2 \cos t}{2 - 2 \cos(\pi/4)}. \end{aligned}$$

Alltså,

$$f(t) = \frac{2 \cos(t - \pi/4) - 2 \cos t}{2 - 2 \cos(\pi/4)} = \frac{2 \cos(t - \pi/4) - 2 \cos t}{2 - \sqrt{2}}$$

är en reell lösning till ekvationen.

(4) a) Låt  $f(t) = \sin |t|$ . Beräkna  $f'$  and  $f''$  i distributionsmening. (2p)

b) Definiera  $\delta \in \mathcal{S}'$  genom  $\delta[\varphi] = \varphi(0)$ , och låt  $g(x) = -x$ . Använd derivatans definition, samt definitionen av produkt, för att visa att  $g\delta' = \delta$ . (2p)

*Lösning:* a) Vi använder Heavisidefunktionen  $H(t)$  (vars derivata är  $\delta(t)$ ) för att skriva:

$$f(t) = \sin |t| = \sin(-t)(1 - H(t)) + \sin(t)H(t).$$

Derivering ger nu

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\cos(-t)(1 - H(t)) + \sin(-t)(-\delta(t)) + \cos(t)H(t) + \sin(t)\delta(t) = \\ &= -\cos(-t)(1 - H(t)) + \cos(t)H(t) \end{aligned}$$

eftersom  $\sin(-t)(-\delta(t)) = \sin(t)\delta(t) = \sin(0) = 0$  (se exempel 8.19 på sidan 207 i Vretblad). Ytterligare derivering ger nu

$$\begin{aligned} f''(t) &= -\sin(-t)(1 - H(t)) - \cos(-t)(-\delta(t)) - \sin(t)H(t) + \cos(t)\delta(t) = \\ &= -\sin |t| + 2\delta(t) \end{aligned}$$

eftersom  $\cos(t)\delta(t) = \cos(-t)\delta(t) = \cos(0) = 1$ .

b) Enligt definition är  $\delta'[\varphi] = -\delta[\varphi'] = -\varphi'(0)$ . Definitionen av multiplikationen ger nu:

$$g\delta'[\varphi] = \delta'[g\varphi] = -(g'(0)\varphi(0) + g(0)\varphi'(0)) = \varphi(0).$$

Således är  $g\delta' = \delta$ .

(5) Låt

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| < \pi \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases}$$

a) Använd Fouriertransformens definition för att bestämma  $\widehat{f}(\omega)$ . Förkorta svaret så långt som möjligt. (2p)

b) För varje värde på  $t \in \mathbb{R}$ , bestäm gränsvärdet  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ . (1p)

c) Använd resultatet från a) för att beräkna (1p)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{(x^2 - 1)^2} dx.$$

*Lösning:* a) Enligt definition har vi

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Eftersom  $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$  får vi

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2i} \left( \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(\omega-1)} dt - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(\omega+1)} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left( \left[ \frac{e^{-it(\omega-1)}}{-i(\omega-1)} \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[ \frac{e^{-it(\omega+1)}}{-i(\omega+1)} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \end{aligned}$$

vilket efter förenkling ger

$$\widehat{f}(\omega) = 2i \frac{\sin \pi \omega}{\omega^2 - 1}.$$

b) Vi använder oss av inversformeln (Sats 7.5, sid 171). Vi noterar att  $f$  är kontinuerlig, och att höger- och vänsterderivatorna existerar i varje punkt. Vi får att för varje  $t \in \mathbb{R}$  gäller

$$f(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Således,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2\pi f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Här använder vi Plancherels formel; nämligen att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \pi.$$

Resultatet i a) ger att

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2^2 \frac{\sin^2 \pi\omega}{(\omega^2 - 1)^2} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi\omega}{(\omega^2 - 1)^2} d\omega$$

Alltså har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi\omega}{(\omega^2 - 1)^2} d\omega = \frac{\pi^2}{2}.$$

(6) Låt  $f \in L^1(\mathbb{R})$  vara sådan att  $f'$  är kontinuerlig och  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Bestäm en funktion  $g$  som uppfyller

$$g(t) = \int_{-\infty}^t e^{y-t} g(y) dy + f'(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Lösning:* Vi noterar först att

$$\int_{-\infty}^t e^{y-t} g(y) dy = \int_{-\infty}^t e^{-(t-y)} g(y) dy.$$

Om vi låter

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

kan vi skriva

$$\int_{-\infty}^t e^{-(t-y)} g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-y) g(y) dy$$

(notera att  $h(t-y) = 0$  för  $y > t$ ). Således, vi kan skriva integralekvationen som

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-y) g(y) dy + f'(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi Fouriertransformerar:

$$\widehat{g}(\omega) = \widehat{h}(\omega) \widehat{g}(\omega) + i\omega \widehat{f}(\omega).$$

Enligt F30 i Beta har vi

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega}.$$

Löser vi ut  $\widehat{g}(\omega)$  fås

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{i\omega\widehat{f}(\omega)}{1 - \widehat{h}(\omega)} = \frac{(1 + i\omega)i\omega\widehat{f}(\omega)}{i\omega} = i\omega\widehat{f}(\omega) + \widehat{f}(\omega).$$

Inverstransform ger nu att

$$g(t) = f'(t) + f(t).$$

- (7) Centralt för Sturm-Liouville-problem är att man har att göra med symmetriska operatorer. Låt  $V$  vara ett inre produktrum, och antag att  $A : V \rightarrow V$  är en symmetrisk operator.

a) Visa att om  $\lambda$  är ett egenvärde till operatören  $A$  så måste  $\lambda$  vara reellt. **(2p)**

b) Visa att egenvektorer som hör till olika egenvärden är ortogonala. **(2p)**

*Lösning:* Se bevis av Lemma 6.1 på sidan 155 i Vretblad.

- (8) a) Antag att  $f \in C^2(\mathbb{T})$  ( $f$  är  $2\pi$ -periodisk och två gånger kontinuerligt deriverbar). Låt  $c_n$  beteckna  $f$ 's (komplexa) Fourierkoefficienter. Visa att det finns en konstant  $M > 0$  sådan att

$$|c_n| \leq \frac{M}{|n|^2} \text{ för alla } n \neq 0.$$

Visa också att  $n^2 c_n \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \pm\infty$ . **(2p)**

b) Bestäm alla  $f \in C(\mathbb{T})$  som uppfyller  $f(2t) = f(t)$  för alla  $t$ . **(2p)**

*Lösning:* a) Se bevis av Sats 4.4 på sidorna 84-85 i Vretblad. Enligt formeln på sidan 84 får vi (partiell integration två gånger, utnyttjande att  $f, f'$  är  $2\pi$ -periodiska)

$$(in)^2 c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) e^{-int} dt.$$

Eftersom  $f''(t)$  är kontinuerlig (enligt antagande) så

$$|n^2 c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| dt = M.$$

Vidare, från Riemann-Lebegues lemma följer att

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''(t) e^{-int} dt \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \pm\infty.$$

Således,  $|n^2 c_n| \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \pm\infty$ .

b) Vi antar att  $f \in C(\mathbb{T})$  och att  $f$  uppfyller  $f(t) = f(2t)$  för alla  $t$ . Låt  $c_n$  beteckna  $f$ 's Fourierkoefficienter, dvs

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Genom att utnyttja att  $f(t) = f(2t)$  får vi

$$c_{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i2nt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(2t)e^{-i2nt} dt.$$

Gör vi nu variabelbytet  $s = 2t$  får vi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(2t)e^{-i2nt} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(s)e^{-ins} ds.$$

Eftersom  $f(s)e^{-ins}$  är  $2\pi$ -periodisk (och vi integrerar över två perioder), får vi

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(s)e^{-ins} ds = 2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins} ds = c_n.$$

Således, vi har att

$$c_{2n} = c_n \text{ för alla } n.$$

Om  $c_m \neq 0$  för något  $m \neq 0$  så skulle vi ha

$$c_{2^k m} = c_m$$

för alla  $k \geq 0$ . Men eftersom  $2^k |m| \rightarrow \infty$  då  $k \rightarrow \infty$  så skulle vi då ha  $c_n \not\rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$  eller då  $n \rightarrow -\infty$ . Detta motsäger Riemann-Lebesgues lemma. Vi drar slutsatsen att vi måste ha  $c_n = 0$  för alla  $n \neq 0$ . Detta medför att  $f$  är en konstant. Och det är klart att om  $f(t)$  är konstant, så uppfyller  $f$  villkoret  $f(t) = f(2t)$ . Följdaktligen är det precis konstanta  $f$  som uppfyller relationen.