Institutionen för matematik

SF1669
Matematisk och numerisk analys II
Läsåret 2014/2015

Seminarieuppgift 2

Se www.kth.se/social/course/SF1669 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

Detta seminarium inleds med ett skriftligt prov på en variant av någon av de av de rekommenderade övningsuppgifterna ur kursboken Calculus av Adams och Essex (8:e upplagan) som är markerade med fetstil, nämligen:

Avsnitt	Rekommenderade uppgifter
12.3	**5**, 7, **13**, 23
12.4	**5**, 7, **11**, 15, 17
12.5	**7**, 11, **17**, 21
12.6	3, **5**, **17**, 19
12.7	**3**, 5, 13, **17**, 25

Vid seminariet kommer nedanstående uppgifter att diskuteras.

Uppgifter

Uppgift 1. När vi ser på skärningen mellan två grafer för funktioner $f(x, y)$ och $g(x, y)$ kan detta ge en kurva i rummet. Exempelvis ger skärningen mellan graferna för

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{och} \qquad g(x, y) = 6 + x - y$$

ett *kägelsnitt*, C, dvs en andragradskurva i planet $x - y - z + 6 = 0$.

(a) Bestäm tangentplanen till de båda graferna i exemplet i punkten $(x, y, z) = (3, 4, 5)$.
(b) Bestäm normalvektorer till de båda graferna i samma punkt.
(c) Hur kan man veta att tangentlinjen till kägelsnittet är vinkelrät mot båda grafernas normalvektorer?
(d) Bestäm tangentlinjen till kurvan C i punkten $(x, y, z) = (3, 4, 5)$, exempelvis med hjälp av kryssprodukten.

Uppgift 2. Den vektorvärda funktionen $\mathbf{f}$ ges av $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \times \mathbf{r}$ där $\mathbf{v}$ är en konstant vektor $\mathbf{v} = (2, -2, 3)$.

(a) Beräkna Jacobimatrisen $D\mathbf{f}$.
(b) Visa att $\mathbf{f}$ är en *linjär* funktion.
(c) Vilken relation råder mellan matrisen för $\mathbf{f}$ sett som en linjär avbildning och Jacobimatrisen $D\mathbf{f}$?

Uppgift 3. En funktion $f(x, y)$ kallas *harmonisk* om den uppfyller Laplace ekvation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(a) Visa genom att använda kedjeregeln att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (a^2 + b^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

om

$$\begin{cases} u &= ax - by, \\ v &= bx + ay, \end{cases}$$

där a och b är konstanter.

(b) Använd (a) för att visa att funktionen $e^{4x+3y}\sin(4x - 3y)$ är harmonisk.
(c) Visa att produkten av två harmoniska funktioner är harmonisk om deras gradienter är vinkelräta mot varandra i varje punkt.

Uppgift 4. Kurvan C med ekvation

$$y^2 = x^3 + x^2$$

kan parametriseras genom $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^2 - 1,\ t^3 - t)$, där t är en reell parameter.

(a) Skissera kurvan C eller plotta den med lämplig programvara.
(b) Kontrollera att $\mathbf{r}(t)$ ligger på kurvan C för alla t. Hur kan man vara säker på att parametriseringen når alla punkter på C?
(c) Kontollera att $\mathbf{r}'(t)$ är vinkelrät mot gradienten $\nabla f(\mathbf{r}(t))$ där

$$f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2.$$

(d) Diskutera varför vektorerna i (c) är vinkelräta mot varandra.